Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

3. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 3.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen mit Multiplizitäten von $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, wobei

(a) $p(x) = 3x^6 - \frac{3}{2}x^5 - \frac{105}{4}x^4 + \frac{15}{8}x^3 + \frac{285}{8}x^2 - 24x + \frac{9}{2}$.
Lösung: Es gilt

$$p\Big(\frac{1}{2}\Big) = 3\cdot\frac{1}{64} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{32} - \frac{105}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{285}{8}\cdot\frac{1}{4} - 24\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{3 - 3 - 105 + 15 + 570 - 768 + 288}{64} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}p(x) &= x^6 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{35}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{95}{8}x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)x^5 - \frac{35}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{95}{8}x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^5 - \frac{35}{4}x^3\Big) - \frac{30}{8}x^3 + \frac{95}{8}x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2\Big) + 10x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x\Big) - 3x + \frac{3}{2} \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3\Big).
\end{aligned}$$

Sei $p_1(x) = x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3$. Es gilt

$$p_1\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{32} - \frac{35}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{30}{8}\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{2} - 3 = \frac{1 - 35 - 30 + 160 - 96}{32} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)x^4 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^4 + \frac{1}{2}x^3\Big) - \frac{17}{2}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2\Big) - 8x^2 + 10x - 3 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x\Big) + 6x - 3 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6\Big).
\end{aligned}$$

Sei $p_2(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6$. Es gilt

$$p_2\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{4} - 8\cdot\frac{1}{2} + 6\frac{1 + 1 - 34 - 64 + 96}{16} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)x^3 + x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 + x^2\Big) - 8x^2 - 8x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 + x^2 - 8x\Big) - 12x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 + x^2 - 8x - 12\Big).
\end{aligned}$$

Sei $p_3(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&p_3\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} - 12 = \frac{1 + 2 - 32 - 96}{8} = \frac{-125}{8} \neq 0, \\
&p_3(-2) = -8 + 4 - 8(-2) - 12 = 0,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p_3(x) = {}& x^3 + x^2 - 8x - 12 \\
& \big(x + 2\big)x^2 - x^2 - 8x - 12 \\
& \big(x + 2\big)\big(x^2 - x\big) - 6x - 12 \\
& \big(x + 2\big)\big(x^2 - x - 6\big) \\
& \big(x + 2\big)\big(x + 2\big)\big(x - 3\big) \\
& \big(x + 2\big)^2\big(x - 3\big).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$p(x) = 3\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^3\big(x + 2\big)^2\big(x - 3\big).$$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind damit $\frac{1}{2}$ mit Multiplizität 3, -2 mit Multiplizität 2 und 3 mit Multiplizität 1.

(b) $p(x) = 2x^5 - (2 + 14i)x^4 - (36 - 14i)x^3 + (36 + 40i)x^2 + (16 - 40i)x - 16$.
Lösung: Es gilt

$$p(1) = 2 - (2 + 14i) - (36 - 14i) + (36 + 40i) + (16 - 40i) - 16 = 0.$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p(x) &= x^5 - (1 + 7i)x^4 - (18 - 7i)x^3 + (18 + 20i)x^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)x^4 - 7ix^4 - (18 - 7i)x^3 + (18 + 20i)x^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3\big) - 18x^3 + (18 + 20i)x^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3 - 18x^2\big) + 20ix^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix\big) + 8x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8\big).
\end{aligned}$$

Sei $p_1(x) = x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&p_1(1) = 1 - 7i - 18 + 20i + 8 = -9 + 13i \neq 0, \\
&p_1(i) = 1 - 7i \cdot (-i) - 18 \cdot (-1) + 20i \cdot i + 8 = 1 - 7 + 18 - 20 + 8 = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8 \\ &= \big(x-i\big)x^3 - 6ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8 \\ &= \big(x-i\big)\big(x^3 - 6ix^2\big) - 12x^2 + 20ix + 8 \\ &= \big(x-i\big)\big(x^3 - 6ix^2 - 12x\big) + 8ix + 8 \\ &= \big(x-i\big)\big(x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i\big). \end{aligned}$$

Sei $p_2(x) = x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i$. Es gilt

$$\begin{aligned} p_2(i) &= -i - 6i \cdot (-1) - 12i + 8i = -9i \neq 0 \\ p_2(2i) &= -8i - 6i \cdot (-4) - 12 \cdot 2i + 8i = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i \\ &= \big(x-2i\big)x^2 - 4ix^2 - 12x + 8i \\ &= \big(x-2i\big)\big(x^2 - 4ix\big) - 4x + 8i \\ &= \big(x-2i\big)\big(x^2 - 4ix - 4\big) \\ &= \big(x-2i\big)\big(x-2i\big)\big(x-2i\big) \\ &= \big(x-2i\big)^3. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$p(x) = 2\big(x-1\big)\big(x-i\big)\big(x-2i\big)^3.$$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind damit 1 mit Multiplizität 1, i mit Multiplizität 1 und $2i$ mit Multiplizität 3.

Hausaufgabe 3.2 Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Lösung: Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. Es gilt $(0,0,0) \in W$, denn $0 + 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Wenn $x, y \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 - 3x_3) + (y_1 + y_2 - 3y_3) = 0 + 0 = 0 \\ &(\lambda x_1) + (\lambda x_2) - 3(\lambda x_3) = \lambda(x_1 + x_2 - 3x_3) = 0 \end{aligned}$$

und darum $x + y \in W$ und $\lambda \cdot x \in W$. Es folgt, dass W ein Unterraum ist.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Lösung: $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\}$ ist kein Unterraum. Wenn $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$, dann $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \neq 1$ und darum $(0,0,0) \notin W$.

(c) $\{(x_1 + x_2, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Lösung: Es gilt

$$W := \{(x_1 + x_2, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Damit ist W ein Unterraum.

(d) $\{(x_1 + x_2, x_2^2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Lösung: $W := \{(x_1 + x_2, x_2^2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ist kein Unterraum. Es gilt

$$W = \{(x_1, x_2^2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in [0, \infty)\}$$

und darum $(0, 1) \in W$, aber $(-1) \cdot (0, 1) = (0, -1) \notin W$.

(e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Lösung: Sei $W := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$. Das neutrale Element für Addition in $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Nullfunktion

$$\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0.$$

Weil $\mathbf{0}(x) = 0 = -0 = -\mathbf{0}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt $\mathbf{0} \in W$. Wenn $f, g \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -\big(f(x) + g(x)\big) = -(f + g)(x),$$
$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) = \big(-(\lambda \cdot f)\big)(x).$$

Es folgt, dass $f + g \in W$ und $\lambda \cdot f \in W$.

(f) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x + 1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Lösung: Es gilt

$$\mathbf{0}(x + 1) = 0 = \mathbf{0}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und darum $\mathbf{0} \in W := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x + 1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$. Wenn $f, g \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x + 1) = f(x + 1) + g(x + 1) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$
$$(\lambda \cdot f)(x + 1) = \lambda f(x + 1) = \lambda f(x) = (\lambda \cdot f)(x).$$

Es folgt, dass $f + g \in W$ und $\lambda \cdot f \in W$.

(g) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x + 1) = f(x) + 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Lösung: $W := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ ist kein Unterraum. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist enthalten in W, aber weil

$$-\mathrm{id}(x + 1) = -(x + 1) = -x - 1 = -\mathrm{id}(x) - 1 \neq -\mathrm{id}(x) + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gilt $-\mathrm{id} \notin W$.