Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

4. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 4.1 Sei V der reelle Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\phi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x + x, \\
\chi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x - x, \\
\psi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2, \\
\eta &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto xe^x, \\
\theta &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2e^x
\end{aligned}$$

linear unabhängig in V sind.

Hausaufgabe 4.2 Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$\begin{aligned}
v_1 &= (3, 2, 1, 0), \\
v_2 &= (-1, 2, 3, -1), \\
v_3 &= (0, 3, 4, 0), \\
v_4 &= (1, 1, 1, 1), \\
v_5 &= (-2, 4, 6, -2), \\
v_6 &= (4, 0, -2, 1).
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$v_4 = v_3 - v_2, \quad v_5 = 2v_2, \quad v_6 = v_1 - v_2.$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $V = \operatorname{span}\big(\{v_j : 1 \leq j \leq 6\}\big)$ mit

$$B \not\subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}.$$

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Teilmengen $B \subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}$, sodass B eine Basis von V ist.

Hausaufgabe 4.3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Nehmen Sie an, dass $\dim(V) = n$ und $|K| = m$. Zeigen Sie, dass

$$|V| = m^n.$$

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 19.05.2024, 23.59 Uhr in Panda.