Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

4. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 4.1 Sei V der reelle Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\phi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x + x,\\
\chi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x - x,\\
\psi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,\\
\eta &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto xe^x,\\
\theta &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2e^x
\end{aligned}$$

linear unabhängig in V sind.

Lösung: Seien $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ und nehme an, dass $c_1\phi + c_2\chi + c_3\psi + c_4\eta + c_5\theta$ die Nullfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\theta(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xe^x} = 0\\
\lim_{x\to\infty} \frac{\chi(x)}{\theta(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xe^x} = 0\\
\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\theta(x)} &= \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0\\
\lim_{x\to\infty} \frac{\eta(x)}{\theta(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0
\end{aligned}$$

und darum

$$\begin{aligned}
c_5 &= c_1 \lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\theta(x)} + c_2 \lim_{x\to\infty} \frac{\chi(x)}{\theta(x)} + c_3 \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\theta(x)} + c_4 \lim_{x\to\infty} \frac{\eta(x)}{\theta(x)} + c_5 \lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{\theta(x)}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{c_1\phi(x) + c_2\chi(x) + c_3\psi(x) + c_4\eta(x) + c_5\theta(x)}{\theta(x)} = \lim_{x\to\infty} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x} = 0\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{\chi(x)}{\psi(x)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x} = 0\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{\eta(x)}{\psi(x)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{\theta(x)}{\psi(x)} &= \lim_{x\to-\infty} e^x = 0
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
c_3 &= c_1 \lim_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} + c_2 \lim_{x\to-\infty} \frac{\chi(x)}{\psi(x)} + c_3 \lim_{x\to-\infty} \frac{\psi(x)}{\psi(x)} + c_4 \lim_{x\to-\infty} \frac{\eta(x)}{\psi(x)} + c_5 \lim_{x\to-\infty} \frac{\theta(x)}{\psi(x)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{c_1\phi(x) + c_2\chi(x) + c_3\psi(x) + c_4\eta(x) + c_5\theta(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $c_1\phi(x) + c_2\chi(x) + c_4\eta(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$, folgt

$$c_1 + c_2 = c_1\phi(0) + c_2\chi(0) + c_4\eta(0) = 0$$

Weil $\phi'' = \chi''$ und $c_1 + c_2 = 0$, ist $c_4\psi'' = c_1\phi'' + c_2\chi'' + c_4\eta'' = \big(c_1\phi + c_2\chi + c_4\eta\big)''$ die Nullfunktion. Es gilt $\eta''(x) = xe^x + 2e^x$ und darum $\eta''(0) = 2$. Es folgt, dass $c_4 = 0$. Jetzt ist $c_1\phi + c_2\chi$ die Nullfunktion. Weil $c_1 + c_2 = 0$, folgt

$$(c_1 - c_2)x = (c_1 + c_2)e^x + (c_1 - c_2)x = c_1\phi(x) + c_2\chi(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere folgt für $x = 1$, dass $c_1 - c_2 = 0$. Damit haben wir bewiesen, dass $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Es folgt, dass ϕ, χ, ψ, η und θ linear unabhängig sind.

Hausaufgabe 4.2 Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (3, 2, 1, 0), \\ v_2 &= (-1, 2, 3, -1), \\ v_3 &= (0, 3, 4, 0), \\ v_4 &= (1, 1, 1, 1), \\ v_5 &= (-2, 4, 6, -2), \\ v_6 &= (4, 0, -2, 1). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$v_4 = v_3 - v_2, \quad v_5 = 2v_2, \quad v_6 = v_1 - v_2.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} v_3 - v_2 &= (0, 3, 4, 0) - (-1, 2, 3, -1) = (1, 1, 1, 1) = v_4, \\ v_5 &= (-2, 4, 6, -2) = 2(-1, 2, 3, -1) = 2v_2, \\ v_1 - v_2 &= (3, 2, 1, 0) - (-1, 2, 3, -1) = (4, 0, -2, 1) = v_6. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $V = \operatorname{span}\big(\{v_j : 1 \le j \le 6\}\big)$ mit

$$B \not\subseteq \{v_j : 1 \le j \le 6\}.$$

Lösung: Wir behaupten, dass v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind. Um dies zu beweisen, seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und nehme an, dass $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_2 = O$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &3c_1 - c_2 = 0 \\ &2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ &c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0 \\ &-c_2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir $c_2 = 0$. Die erste Gleichung ergibt dann $c_1 = 0$. Da $c_1 = c_2 = 0$ ist, zeigt die zweite Gleichung, dass $c_3 = 0$. Dies zeigt, dass v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

Wenn $w \in \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$, dann sind v_1, v_2, v_3, w linear abhängig. Um dies zu zeigen, seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. Dann gilt $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + (-1)w = O$. Weil $-1 \neq 0$, folgt, dass v_1, v_2, v_3, w linear abhängig sind. Aus (a) folgt, das $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine maximale Teilmenge von linear unabhängige Vektoren und damit eine Basis von V ist. Darum gilt $\dim(V) = 3$. Es folgt, dass jede Teilmenge von 3 linear unabhängige Vektoren eine Basis von V ist.

Weil v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, sind auch $2v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig. Die Menge $\{2v_1, v_2, v_3\}$ ist damit eine Basis. Es gilt $2v_1 \neq v_j$ für alle $1 \le j \le 6$ und darum ist $\{2v_1, v_2, v_3\}$ nicht in $\{v_j : 1 \le j \le 6\}$ enhalten.

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Teilmengen $B \subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}$, sodass B eine Basis von V ist.

Lösung: Weil $\dim(V) = 3$, besitzt jede Basis von V genau 3 Elemente. Sei $\mathcal{B} \subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}$ mit $|\mathcal{B}| = 3$. $\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis, wenn die Elemente von $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind. Es gibt $\binom{6}{3} = 20$ Teilmengen $\mathcal{B}$ von $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ mit $|\mathcal{B}| = 3$. Weil v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, folgt nach (a), dass

- $v_4 \notin \mathrm{span}(\{v_1, v_2\})$,
- $v_4 \notin \mathrm{span}(\{v_1, v_3\})$,
- $v_6 \notin \mathrm{span}(\{v_1, v_3\})$,
- $v_6 \notin \mathrm{span}(\{v_2, v_3\})$,
- $v_4 \notin \mathrm{span}(\{v_1, v_6\}) = \mathrm{span}(\{v_1, v_2\})$,
- $v_4 \notin \mathrm{span}(\{v_2, v_6\}) = \mathrm{span}(\{v_1, v_2\})$,
- $v_6 \notin \mathrm{span}(\{v_3, v_4\}) = \mathrm{span}(\{v_2, v_3\})$.

Darum sind

1. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$,
2. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_4\}$,
3. $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, v_4\}$,
4. $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, v_6\}$,
5. $\mathcal{B} = \{v_1, v_4, v_6\}$,
6. $\mathcal{B} = \{v_2, v_3, v_6\}$,
7. $\mathcal{B} = \{v_2, v_4, v_6\}$,
8. $\mathcal{B} = \{v_3, v_4, v_6\}$

Basen. Nach (a) sind

9. $\mathcal{B} = \{v_2, v_3, v_4\}$,
10. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_6\}$

keine Basen.

Weil $v_5 = 2v_2$, folgt aus den Fällen 1, 2, 6, 7, 9 und 10, dass

11. $\mathcal{B} = \{v_1, v_5, v_3\}$,
12. $\mathcal{B} = \{v_1, v_5, v_4\}$,
13. $\mathcal{B} = \{v_5, v_3, v_6\}$,
14. $\mathcal{B} = \{v_5, v_4, v_6\}$,

Basen sind und

15. $\mathcal{B} = \{v_5, v_3, v_4\}$,
16. $\mathcal{B} = \{v_1, v_5, v_6\}$

keine Basen sind. Wenn $v_2, v_5 \in \mathcal{B}$ dann ist $\mathcal{B}$ keine Base. Darum sind

17. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_5\}$,
18. $\mathcal{B} = \{v_2, v_3, v_5\}$,
19. $\mathcal{B} = \{v_2, v_4, v_5\}$,
20. $\mathcal{B} = \{v_2, v_5, v_6\}$

keine Basen.

Hausaufgabe 4.3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Nehmen Sie an, dass $\dim(V) = n$ und $|K| = m$. Zeigen Sie, dass

$$|V| = m^n.$$

Lösung: Weil $\dim(V) = n$ gibt es eine Basis von V mit genau n Elemente. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. Da jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$, mit $c_1, \ldots, c_n \in K$, geschrieben werden kann, gilt

$$|V| = |\{(c_1, \ldots, c_n) : c_1, \ldots, c_n \in K\}| = |K^n| = |K|^n.$$

Wenn $|K| = m$, dann folgt $|V| = m^n$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 19.05.2024, 23.59 Uhr in Panda.