Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

7. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 7.1 Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ &3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 = 17 \\ &2x_1 - 7x_3 + 11x_4 = 7 \end{aligned}$$

Was ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems? Geben Sie eine Basis des Unterraums $\mathcal{L}$ an.
Lösung (ohne Rechnung): Die Lösungen sind

$$x = \left(\frac{7}{4} - \frac{t}{4}, \frac{9}{4} - \frac{3t}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{3t}{2}, t\right) \qquad (t \in \mathbb{C}).$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist

$$\mathcal{L} = \left\{ t\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 1\right) : t \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 1\right) \right\}.$$

Die Menge $\left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 1\right)\right\}$ ist eine Basis von $\mathcal{L}$.

Hausaufgabe 7.2 Für welche komplexen Parameter $a \in \mathbb{C}$ besitzt das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^3$ an.

$$\begin{aligned} &(1-i)x_2 + (-i)x_3 = -5 - 2i \\ &(-1+i)x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = -i \\ &-ix_1 + x_2 = -1 - 3i \\ &ix_1 + x_2 = 1 - i + 2a \end{aligned}$$

Lösung (ohne Rechnung): Das Gleichungssystem besitzt genau dann eine Lösung wenn $a = -5$. In diesem Fall gilt $x = (1 + 4i, -5 - 2i, 5 + 2i)$.

Hausaufgabe 7.3 Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Falls ja, bestimme die inverse Matrix.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung (ohne Rechnung): A ist invertierbar mit Inversematrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{-7}{6} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{12} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn B invertierbar wäre, dann gäbe es eine Matrix C, sodass $CB = I_3$. Dies würde implizieren, dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = CB \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was ein Widerspruch wäre. Daher ist B nicht invertierbar.