Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

8. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 8.1 Seien U, V und W Vektorräume über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$ für alle lineare Abbildungen $f : V \to W$ und $g, h : U \to V$.

(b) Zeigen Sie, dass $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ für alle lineare Abbildungen $f, g : V \to W$ und $h : U \to V$.

Hausaufgabe 8.2 Sei K in Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Spur (Eng. trace) $\mathrm{tr}(A)$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist definiert als die Summe der Matrixkoeffizienten auf der Diagonalen von A, d.h.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{n} A_{j,j}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K, \quad A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \big(A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ gibt, sodass $AB - BA = I_n$ die Identitätsmatrix ist. *Hinweis: (b) könnte hilfreich sein.*

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A) \qquad \big(A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und invertierbare Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$.

Hausaufgabe 8.3 Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Projektion auf V ist eine lineare Abbildung $p : V \to V$, sodass $p \circ p = p$.

(a) Seien U und W Unterräume von V, sodass $V = U \oplus W$. Sei $p : V \to V$ eine Abbildung gegeben durch

$$p(u + w) = u \qquad (u \in U, w \in W).$$

Zeigen Sie, dass p eine Projektion ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $p : V \to V$ eine Projektion ist. Seien

$$U := \{v \in V : p(v) = v\} \quad \text{und} \quad W = \{v \in V : p(v) = O\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$ und

$$p(u + w) = u \qquad \big(u \in U, w \in W\big).$$

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag, den 16.06.2024, 23.59 Uhr in Panda.