Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

8. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 8.1 Seien U, V und W Vektorräume über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$ für alle lineare Abbildungen $f : V \to W$ und $g, h : U \to V$.
Lösung: Für alle $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned}\big(f \circ (g+h)\big)(x) &= f\big((g+h)(x)\big) = f\big(g(x) + h(x)\big) = f\big(g(x)\big) + f\big(h(x)\big) \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x).\end{aligned}$$

Es folgt, dass $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

(b) Zeigen Sie, dass $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ für alle lineare Abbildungen $f, g : V \to W$ und $h : U \to V$.
Lösung: Für alle $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned}\big((f+g) \circ h\big)(x) &= (f+g)\big(h(x)\big) = f\big(h(x)\big) + f\big(g(x)\big) = (f \circ h)(x) + (f \circ g)(x) \\ &= \big((f \circ h) + (g \circ h)\big)(x).\end{aligned}$$

Es folgt, dass $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$.

Hausaufgabe 8.2 Sei K in Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Spur (Eng. trace) $\mathrm{tr}(A)$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist definiert als die Summe der Matrixkoeffizienten auf der Diagonalen von A, d.h.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{n} A_{j,j}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K, \quad A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

eine lineare Abbildung ist.
Lösung: Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A+B) &= \sum_{j=1}^{n} (A+B)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} (A_{j,j} + B_{j,j}) \\ &= \Big(\sum_{j=1} A_{j,j}\Big) + \Big(\sum_{j=1} B_{j,j}\Big) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \\ \mathrm{tr}(\lambda A) &= \sum_{j=1}^{n} (\lambda A)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda A_{j,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{j,j} = \lambda \mathrm{tr}(A).\end{aligned}$$

Es folgt, dass tr linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \big(A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

Lösung: Sein $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{j=1}^{n}(AB)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{k,j}A_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k} = \mathrm{tr}(BA).\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ gibt, sodass $AB-BA = I_n$ die Identitätsmatrix ist.
Lösung: Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Es gilt

$$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = 0 \neq 1 = \mathrm{tr}(I_n).$$

Es folgt, dass $AB - BA \neq I_n$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A) \qquad \big(A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

Lösung: Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Es gilt

$$\mathrm{tr}({}^tA) = \sum_{j=1}^{n}({}^tA)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,j} = \mathrm{tr}(A).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und invertierbare Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. *Lösung:*Sein $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Wenn A invertierbar ist, dann

$$\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}\big((AB)A^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(A^{-1}(AB)\big) = \mathrm{tr}(A^{-1}AB) = \mathrm{tr}(B).$$

Hausaufgabe 8.3 Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Projektion auf V ist eine lineare Abbildung $p : V \to V$, sodass $p \circ p = p$.

(a) Seien U und W Unterräume von V, sodass $V = U \oplus W$. Sei $p : V \to V$ eine Abbildung gegeben durch

$$p(u + w) = u \qquad (u \in U, w \in W).$$

Zeigen Sie, dass p eine Projektion ist.
Lösung: Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$. Es gibt eindeutige $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in W$, sodass $v_1 = u_1 + w_1$ und $v_2 = u_2 + w_2$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}&p(v_1 + v_2) = p\big((u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)\big) = u_1 + u_2 = p(u_1 + w_1) + p(u_2 + w_2) = p(v_1) + p(v_2), \\ &p(\lambda v_1) = p(\lambda u_1 + \lambda w_1) = \lambda u_1 = \lambda p(u_1 + w_1) = \lambda p(v_1).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass p linear ist. Weiter gilt

$$(p \circ p)(v_1) = p(p(u_1 + w_1)) = p(u_1) = u_1 = p(u_1 + w_1) = p(v_1).$$

Dies zeigt, dass $p \circ p = p$. Es folgt, dass p eine Projektion ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $p : V \to V$ eine Projektion ist. Seien

$$U := \{v \in V : p(v) = v\} \quad \text{und} \quad W = \{v \in V : p(v) = O\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$ und

$$p(u+w) = u \qquad \big(u \in U, w \in W\big).$$

Lösung: Sei $v \in U \cap W$. Dann gilt $p(v) = v$ und $p(v) = O$ und darum $v = O$. Es folgt, dass $U \cap W = \{O\}$. Sei $v \in V$. Setze $u = p(v)$ und $w = v - u$. Dann gilt $v = u + w$. Da $p(u) = p\big(p(v)\big) = (p \circ p)(v) = p(v) = u$, ist $u \in U$. Da $p(w) = p(v-u) = p(v) - p(u) = u - u = O$, ist $w \in W$. Dies zeigt, dass $U + W = V$. Es folgt, dass $V = U \oplus W$. Wenn $u \in U$ und $w \in W$, dann $p(u+w) = p(u) + p(w) = u + O = u$.