Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

9. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 9.1 Sei K ein Körper und sei

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K).$$

Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn die Zeilenvektoren

$$A^i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$$

für $1 \leq i \leq n$ linear unabhängig sind.

Hausaufgabe 9.2 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und sei $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(L_A)$ und $\mathrm{Im}(L_A)$, falls

(a) $m = 2$, $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) $m = 4$, $n = 5$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 9.3 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei U ein Unterraum von W.

(a) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ von U unter f ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(U)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\dim\big(f^{-1}(U)\big) = \dim\big(U \cap \mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag, den 23.06.2024, 23.59 Uhr in Panda.