Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

9. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 9.1 Sei K ein Körper und sei

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K).$$

Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn die Zeilenvektoren

$$A^i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$$

für $1 \leq i \leq n$ linear unabhängig sind.

Lösung: Nach Präsenzaufgabe 9.1 ist eine Matrix B genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren von B linear unabängig sind. Weiter sind die Zeilenvektoren von A genau die Spaltenvektoren von ${}^tA$. Die folgenden Aussagen sind darum äquivalent

1. A ist invertierbar.
2. ${}^tA$ ist invertierbar.
3. Die Spaltenvektoren von ${}^tA$ sind linear unabhängig.
4. Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.

Hausaufgabe 9.2 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und sei $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(L_A)$ und $\mathrm{Im}(L_A)$, falls

(a) $m = 2$, $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(L_A) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 5y + 6z = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \text{ und } y + 2z = 0\} \\
&= \mathrm{span}\{(1, -2, 1)\} \\
\mathrm{Im}(L_A) &= \{Av \in \mathbb{R}^2 : v \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{span}\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\} = \mathrm{span}\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}
\end{aligned}$$

Da $(1, 4)$ und $(2, 5)$ linear unabängig sind und $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, folgt $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^2$. Die Menge $\{(1, -2, 1)\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Ker}(L_A)$ und $\{e_1, e_2\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Im}(L_A)$.

(b) $m = 4$, $n = 5$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(L_A) &= \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : y+u+v=0, x+u=0 \text{ und } z+u+v=0\} \\
&= \{(s, s+t, s+t, -s, -t) : s,t \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\{(1,1,1,-1,0), (0,1,1,0,-1)\} \\
\operatorname{Im}(L_A) &= \{Av \in \mathbb{R}^4 : v \in \mathbb{R}^5\} = \operatorname{span}\big\{Ae_j : j \in \{1,2,3,4,5\}\big\} \\
&= \operatorname{span}\{(0,1,0,1), (1,0,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)\} \\
&= \operatorname{span}\{(0,1,0,1), (1,0,0,0), (0,0,1,0)\}
\end{aligned}$$

Die Menge $\{(1,1,1,-1,0), (0,1,1,0,-1)\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Ker}(L_A)$ und die Menge $\{(0,1,0,1), (1,0,0,0), (0,0,1,0)\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Im}(L_A)$.

Hausaufgabe 9.3 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei U ein Unterraum von W.

(a) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ von U unter f ein Unterraum von V ist.
Lösung: Da $f(O_V) = O_W \in U$ gilt $O_V \in f^{-1}(U)$. Wenn $x, y \in f^{-1}(U)$, dann $f(x), f(y) \in U$. Weil U ein Unterraum und f linear ist, gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) \in U$. Es folgt $x + y \in f^{-1}(U)$. Wenn $x \in f^{-1}(U)$ und $\lambda \in K$, dann $f(x) \in U$ und darum $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in U$. Es folgt $\lambda x \in f^{-1}(U)$. Dies zeigt, dass $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(U)$.
Lösung: Ein Element $x \in V$ ist genau dann enthalten in $\operatorname{Ker}(f)$, wenn $f(x) = O_W$. Weil $O_W \in U$, folgt $x \in f^{-1}(U)$ für alle $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\dim\big(f^{-1}(U)\big) = \dim\big(U \cap \operatorname{Im}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)$.
Lösung: Wenn X, Y endlich dimensionale Vektorräume über K sind und $\phi : X \to Y$ linear ist, dann gilt

$$\dim(X) = \dim\big(\operatorname{Ker}(\phi)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(\phi)\big)$$

Wir betrachten jetzt $X = f^{-1}(U)$, $Y = W$ und $\phi : f^{-1}(U) \to W$, $x \mapsto f(x)$. Dann gilt

$$\operatorname{Im}(\phi) = f(f^{-1}(U)) = U \cap \operatorname{Im}(f)$$

und $\operatorname{Ker}(\phi) = \operatorname{Ker}(f)$. Es folgt

$$\dim\big(f^{-1}(U)\big) = \dim\big(U \cap \operatorname{Im}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big).$$