Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

10. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 10.1 Sei K ein Körper sowie $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basen von K^n. Wir definieren die folgenden Matrizen, indem wir die Basisvektoren als Spalten einsetzen:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Basiswechselmatrix gilt:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A^{-1}B.$$

Lösung: Sei $\mathcal{E}$ die standard Basis von K^n. Dann gilt

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}) = A \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = B.$$

Es folgt, dass

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id})^{-1} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A^{-1}B.$$

(b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$, falls $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 10.2

(a) Sei V der Vektorraum der (2×2)–Matrizen über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ von

$$g \colon V \to V, \quad A \mapsto {}^tA + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$$

bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung: Wenn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann

$$\begin{aligned} g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & b+c-d \\ a+b & b+d \end{pmatrix} \\ &= (2a-c)v_1 + (2a-b-c-d)v_2 + (-a-b)v_3 + (-2a-b+c-d)v_4. \end{aligned}$$

Darum

$$\begin{aligned} g(v_1) &= 2v_1 + v_2 - v_3 - 3v_4, \\ g(v_2) &= v_2 + v_4, \\ g(v_3) &= v_1 + 3v_2 + 2v_3 + v_4, \\ g(v_4) &= -v_2 - v_3 - v_4. \end{aligned}$$

Es folgt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen A mit $g(A) = B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Lösung:*Es gilt

$$B = 3v_1 + 5v_2 + v_3 - v_4$$

Das system von lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + z &= 3 \\ x + y + 3z - u &= 5 \\ -x + 2z - u &= 1 \\ -3x + y + z - u &= -1 \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{5}u + 1 \\ y &= 1 \\ z &= \frac{2}{5}u + 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $g(A) = B$ ist darum

$$\begin{aligned} &\left\{ xv_1 + yv_2 + zv_3 + uv_4 : u \in \mathbb{R}, x = -\frac{1}{5}u + 1, y = 1, z = \frac{2}{5}u + 1 \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{5}u + 1\right) v_1 + v_2 + \left(\frac{2}{5}u + 1\right) v_3 + uv_4 : u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}u + 1 & \frac{1}{5}u - 2 \\ -\frac{2}{5}u - 1 & -\frac{1}{5}u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -u + 1 & u - 2 \\ -2u - 1 & -u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$