Universität Paderborn Sommersemester 2024
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Lineare Algebra für Informatiker

11. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 11.1 Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & i & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 11.2 Sei $s \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A(s) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1-s \\ 4 & -2+s & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A(s)$ invertierbar?

Hausaufgabe 11.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ sei

$$\overline{A} := (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{und} \quad A^\dagger := {}^t(\overline{A}).$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt unitär falls, sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^\dagger$ gilt. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt hermitesch, wenn $A^\dagger = A$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(b) $|\det(A)| = 1$ für alle unitäre Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(c) $\det(A) \in \mathbb{R}$ für alle hermitesche Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(d) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) := \big\{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\big\}$ ist zusammen mit Matrixmultplikation eine Gruppe.

(e) $\mathrm{SU}(n) := \big\{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A \text{ ist unitär}\big\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag, den 07.07.2024, 23.59 Uhr in Panda.