Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

11. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 11.1 Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & i & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ 0 & 5 & 2-i \end{pmatrix} \\ &= i \det \begin{pmatrix} 1 & -2i & i \\ 0 & 1+7i & 2-3i \\ 0 & 5 & 2-i \end{pmatrix} = i \det \begin{pmatrix} 1+7i & 2-3i \\ 5 & 2-i \end{pmatrix} \\ &= i\big((1+7i)(2-i) - 5(2-3i)\big) = -28 - i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & i & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & i & -5 & 11 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & -5 & 11 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ &= i \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - (-5) \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + 11 \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= i - 115 + 209 = 94 + i. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 11.2 Sei $s \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A(s) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1-s \\ 4 & -2+s & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A(s)$ invertierbar?
Lösung: Es gilt

$$\det(A(s)) = A(s) = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1-s \\ 0 & 10+s & 5-4s \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 10+s & 5-4s \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -40-13s.$$

Die Matrix $A(s)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A(s)) \neq 0$, d.h. wenn $s \neq -\frac{40}{13}$.

Hausaufgabe 11.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ sei

$$\overline{A} := (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{und} \quad A^\dagger := {}^t(\overline{A}).$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt unitär falls, sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^\dagger$ gilt. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt hermitesch, wenn $A^\dagger = A$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.
Lösung: Es gilt

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \overline{a}_{j,\sigma(j)} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}} = \overline{\det(A)}.$$

(b) $|\det(A)| = 1$ für alle unitäre Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} |\det(A)| &= \sqrt{\det(A)\overline{\det(A)}} = \sqrt{\det(A)\det(\overline{A})} = \sqrt{\det(A)\det({}^t\overline{A})} \\ &= \sqrt{\det(A)\det(A^\dagger)} = \sqrt{\det(AA^\dagger)} = \sqrt{\det(I_n)} = 1. \end{aligned}$$

(c) $\det(A) \in \mathbb{R}$ für alle hermitesche Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.
Lösung: Da

$$\overline{\det(A)}\det(\overline{A}) = \det({}^t\overline{A}) = \det(A^\dagger) = \det(A),$$

ist $\det(A)$ reell.

(d) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) := \big\{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\big\}$ ist zusammen mit Matrixmultplikation eine Gruppe.
Lösung: Matrixmultiplikation ist assoziativ. Weiter gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \qquad \big(A, B \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\big)$$

und darum ist $AB \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ für alle $A, B \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Die Identitätsmatrix hat Determinante gleich 1 und darum $I_n \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Beachte, dass für alle $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ die Identität $AI_n = I_nA = A$ gilt. Wenn $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, dann $\det(A) = 1 \neq 0$ und darum ist A invertierbar. Es gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1$$

und darum $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Daraus folgt, dass $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ eine Gruppe ist.

(e) $\mathrm{SU}(n) := \big\{A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) : A \text{ ist unitär}\big\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.
Lösung: Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$gilt

$$(AB)^\dagger = {}^t(\overline{AB}) = {}^t(\overline{A}\,\overline{B}) = {}^t(\overline{B}){}^t(\overline{A}) = B^\dagger A^\dagger. \tag{1}$$

Wenn $A, B \in \mathrm{SU}(n)$, dann

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

und damit $AB \in \mathrm{SU}(n)$. Wenn $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ invertierbar ist, dann folgt aus (1), dass $A^\dagger$ invertierbar ist und

$$(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger.$$

Wenn $A \in \mathrm{SU}(n)$, dann

$$(A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^{-1}.$$

Es folgt, dass $A^{-1} \in \mathrm{SU}(n)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{SU}(n)$ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ ist.