Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

12. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 12.1 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$ und sei $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von L_A und geben Sie wenn möglich eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$ an, sodass BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist, falls

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Hausaufgabe 12.2 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Zwei lineare Abbilungen $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ kommutieren, falls $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ und sind gleichzeitig diagonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ und $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$ beide diagonal sind.
Seien jetzt $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ diagonalisierbare lineare Abbildungen. Beweisen Sie, dass ϕ und ψ genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind. Beschreiben Sie die Eigenwerte von $\phi \circ \psi$, wenn ϕ und ψ kommutieren. _
Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag, den 14.07.2024, 23.59 Uhr in Panda.