Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

12. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 12.1 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$ und sei $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von L_A und geben Sie wenn möglich eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$ an, sodass BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist, falls

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Es gilt $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$. Damit sind die Eigenwerte gegeben durch 0 und 1. Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $V_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $\ker(A - 1) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist A diagonalisierbar. Sei

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\mathcal{E}$ die Einheitsstandardbasis. Dann gilt mit $B := \mathrm{Mat}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ die Identität

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu (b): Es gilt $P_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3$. Damit ist 3 der einzige Eigenwert. Es folgt

$$\ker(A-3) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}e_1$$

da $\operatorname{rang}(A-3) = 2$ und $e_1 \in \ker(A-3)$ (keine Rechnung notwendig). Also ist der Eigenraum zum Eigenwert 3 gegeben durch $\mathbb{C}e_1$. Damit ist A nicht diagonalisierbar.

Wir berechnen (auch wenn in der Aufgabe nicht danach gefragt wird) die Jordan-Form. Es gilt

$$\ker(A-3)^2 = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3$$

da $\operatorname{rang}(A-3)^2 = 1$ und $e_1, e_3 \in \ker(A-3)^2$ (keine Rechnung notwendig).
Es gilt $A - 3^3 = 0$. Dann gilt $e_2 \in \ker(A-3)^3$ aber $e_2 \notin \ker(A-3)^2$. Sei dann

$$\mathcal{B} := \{(A-3)^2 e_2, (A-3)e_2, e_2\} = \{2e_1, 2e_3, e_2\}\,.$$

Dann gilt mit $B := \operatorname{Mat}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ die Identität

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zu (c): Es gilt $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$. Damit sind die Eigenwerte gegeben durch 4 und 2. Lösen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $V_4 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $V_2 = \mathbb{C}(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{C}(e_2 - e_3)$. Sei dann

$$\mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (e_1 - e_2), (e_2 - e_3)\right\}.$$

Dann gilt mit $B := \operatorname{Mat}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ die Identität

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 12.2 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Zwei lineare Abbilungen $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ kommutieren, falls

$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ und sind gleichzeitig diagonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$ beide diagonal sind.
Seien jetzt $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ diagonalisierbare lineare Abbilungen. Beweisen Sie, dass ϕ und ψ genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind. Beschreiben Sie die Eigenwerte von $\phi \circ \psi$, wenn ϕ und ψ kommutieren.

Beweis: Seien ϕ und ψ diagonalisierbare lineare Abbildungen $V \to V$.

Wenn ϕ und ψ gleichzeitig diagonalisierbar sind, existiert eine Basis $\mathcal{B}$, sodass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$ beide Diagonalmatrizen sind. Diagonalmatrizen kommutieren immer miteinander, dementsprechend gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi \circ \psi) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi \circ \phi).\end{aligned}$$

Die Abbildung $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Lin}_K(V, V) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(K), L \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$ $(n = \dim_K(V))$ ist ein Isomorphismus für jede Basis $\mathcal{B}$, dementsprechend gilt $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

Wir nehmen nun an, dass ϕ und ψ kommutieren. Damit gilt für jedes $\lambda \in K$

$$(\psi - \lambda) \circ \phi(v) = \phi \circ (\psi - \lambda)(v)$$

und damit

$$\phi(\mathrm{Eig}(V, \psi, \lambda)) \subseteq \mathrm{Eig}(V, \psi, \lambda).$$

Sei nun $W \subseteq V$ ein Unterraum von V, sodass $\phi(W) \subseteq W$ gilt. Wir wollen zeigen, dass dann auch die Einschränkung $\phi|_W : W \to W$ diagonalisierbar ist.

Sei hierzu $w \in W$ mit $w = w_1 + \cdots + w_k$, wobei w_i Eigenvektoren von ϕ zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sind. Wir zeigen per Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass dann automatisch $w_i \in W$ für alle $i = 1, \cdots, k$ gilt. Für $i = 1$ ist $w = w_1 \in W$. Sei die Induktionsbehauptung gezeigt und $w = w_1 + \cdots + w_{k+1} \in W$. Dann gilt wegen $\phi(W) \subset W$ auch $(\phi - \lambda_1)(W) \subseteq W$, womit

$$W \ni (\phi - \lambda_1)w = \sum_{i=1}^{k+1}(\phi - \lambda_1)w_i = \sum_{i=1}^{k+1}(\lambda_i - \lambda_1)w_i = \sum_{i=2}^{k+1}(\lambda_i - \lambda_1)w_i.$$

folgt. Da $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ für alle $2 \leq i \leq k$ gilt, folgt $w_2, \cdots, w_{k+1} \in W$ per Induktionsvorausetzung und damit dann auch $w_1 \in W$. Wir haben gezeigt, dass

$$W = \bigoplus_{\lambda \in K}(W \cap \mathrm{Eig}(V, \phi, \lambda))$$

gilt, womit $\phi|_W$ ebenfalls diagonalisierbar ist. Seien nun $\mu_1, \cdots, \mu_m$ die unterschiedlichen Eigenwerte von ψ. Nach dem eben gezeigten, ist $\phi|_{\mathrm{Eig}(V,\psi,\mu_i)}$ für jedes $i = 1, \cdots, m$ diagonalisierbar. Für $1 \leq i \leq m$ sei $v_1^i, \cdots, v_{n_i}^i$ mit $n_i = \dim \mathrm{Eig}(V, \psi, \mu_i)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(V, \psi, \mu_i)$ von Eigenvektoren von ϕ. Dann ist

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{m}\{v_j^i : 1 \leq j \leq n_i\}$$

eine Basis von V sodass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$ beide diagonal sind.

Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ die Eigenwerte von ϕ und $\mu_1, \cdots, \mu_m$ die Eigenwerte von ψ. Kommutieren ϕ und ψ, so gilt

$$\textbf{Eigenwerte von } (\phi \circ \psi) \subseteq \{\lambda_i \mu_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m\}.$$

was man daran erkennt, dass

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi \circ \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$$

gilt. Die Inklusion ist im Allgemeinen aber strikt.