Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Klausur
Lineare Algebra für Informatiker

Aufgaben

Aufgabe 1: (15 Punkte)
Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (15 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen.

(a) Sei V ein fünfdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und seien U und W dreidimensionale Unterräume. Dann gilt $\dim(U \cap W) > 0$. *(5 Punkte)*

(b) Für alle quadratischen Matrizen A über $\mathbb{R}$ gilt $\det(-A) = \det(A)$. *(5 Punkte)*

(c) Es gibt eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mit charakteristischem Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - \lambda + 1$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 3: (70 Punkte)
Betrachten Sie $\mathcal{V} = \mathbb{C}^4$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$.

(a) Sei $\mathcal{Z} := \{v \in \mathcal{V} : v_1 = v_4 \text{ und } v_2 = v_3 = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}$ ein Unterraum von $\mathcal{V}$ ist. *(5 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{Z}$. *(3 Punkte)*

(c) Sei $\mathcal{S}$ der Unterraum von $\mathcal{V}$ gegeben durch $\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{V} : v_1 = -v_4\}$.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{Z}$. *(5 Punkte)*

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathcal{S}$. *(5 Punkte)*

(e) Seien

$$\begin{aligned} H &: \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad v \mapsto (0, 2v_2, -2v_3, 0) \\ X &: \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad v \mapsto (v_3, v_4 - v_1, 0, -v_3) \\ Y &: \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad v \mapsto (-v_2, 0, v_1 - v_4, v_2) \end{aligned}$$

Sie dürfen annehmen, dass H, X und Y linear sind.
Bestimmen Sie die Kerne von H, X und Y. *(5 Punkte)*

(f) Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(H) \cap \mathrm{Ker}(X) \cap \mathrm{Ker}(Y)$ gilt. *(3 Punkte)*

(g) Ist eine der Abbildungen H, X oder Y injektiv oder surjektiv? *(3 Punkte)*

(h) Zeigen Sie, dass $X \circ Y - Y \circ X = H$ und $H \circ X - X \circ H = 2X$ gilt. *(8 Punkte)*

Von hier an dürfen Sie annehmen, dass auch die Identität $H \circ Y - Y \circ H = -2Y$ gilt.

(i) Sei $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ der Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Der Kommutator zweier linearer Abbildungen $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ ist als $[F, G] := F \circ G - G \circ F$ definiert. Zeigen Sie, dass die Kommutatorabbildung

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \times \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \to \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}), \quad (F, G) \mapsto [F, G]$$

bilinear ist. Zeigen Sie weiter, dass die Kommutatorabbildung antisymmetrisch ist, d.h. $[F, G] = -[G, F]$ für alle $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. *(6 Punkte)*

(j) Sei $\mathcal{A}$ der Aufspann von H, X und Y in dem Raum $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ der linearen Abbildungen $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Zeigen Sie, dass $[F, G] \in \mathcal{A}$ für alle $F, G \in \mathcal{A}$. *(6 Punkte)*

(k) Sei

$$N : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad v \mapsto (v_1 + 2v_3, -2v_1 + v_2 - 4v_3 + 2v_4, v_3, -2v_3 + v_4)$$

und $\mathcal{B} := \{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0)\}$. Sie dürfen annehmen, dass N linear und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(N)$. *(8 Punkte)*

(l) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte und Eigenvektoren von N. *(10 Punkte)*

(m) Besitzt N verallgemeinerte Eigenvektoren, die keine Eigenvektoren sind? *(3 Punkte)*