Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024
2. Klausur

Klausur
Lineare Algebra für Informatiker

Aufgaben

Aufgabe 1: (15 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^4$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (15 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen.

(a) *(5 P.)* Sei V ein 5-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Dann existiert eine lineare Abbildung $\phi : V \to K$, sodass der Kern von ϕ Dimension gleich 3 hat.

(b) *(5 P.)* Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt, dass $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) \geq 0$.

(c) *(5 P.)* Betrachte $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem standard Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Wenn $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $A(V) \subseteq V$ ist, dann gilt $A(V^\perp) \subseteq V^\perp$.

Aufgabe 3: (70 Punkte)
Wir betrachten $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ als den Vektorraum *über dem Körper der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. Wir schreiben $A^\dagger = {}^t\overline{A}$ für das hermitesche Konjugat von A, d.h.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}).$$

Sei $\mathcal{V} = \{A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(A) = 0, A^\dagger = A\}$.

(a) *(6 P.)* Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}$ ein (reeller) Unterraum von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ ist.

Seien $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) *(5 P.)* Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist.

(c) *(6 P.)* Bestimmen Sie einen (reellen) Unterraum $\mathcal{W}$ von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$, sodass

$$\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}.$$

(d) *(3 P.)* Was ist die Dimension von $\mathcal{W}$?

(e) *(5 P.)* Bestimmen Sie alle $A \in \mathcal{V}$, sodass die Abbildung $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, x \mapsto Ax$ nicht injektiv ist.

(f) *(6 P.)* Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $L_{\sigma_2} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, x \mapsto \sigma_2 x$.

(g) *(5 P.)* Sei $U \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$, sodass $U^\dagger = U^{-1}$. Zeigen Sie, dass $UAU^\dagger \in \mathcal{V}$ für alle $A \in \mathcal{V}$.

Wir definieren die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V};\quad x \mapsto x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$. Für $U \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ mit $U^\dagger = U^{-1}$ definieren wir weiter die Abbildung

$$T_U : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad A \mapsto UAU^\dagger.$$

Sie dürfen annehmen, dass T_U linear ist.

(h) *(6 P.)* Zeigen Sie, dass es für jedes $U \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ mit $U^\dagger = U^{-1}$ genau ein $M \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ gibt, sodass $\phi\big(Mx\big) = U\phi(x)U^\dagger$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie weiter, dass M die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T_U)$ ist.

(i) *(5 P.)* Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}.$

(j) *(13 P.)* Bestimmen Sie eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$, sodass

$$\phi(Mx) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \phi(x) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\dagger$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(k) *(5 P.)* Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das standard Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad (x, y \in \mathbb{R}^3).$$

Beweisen Sie, dass $\det\big(\phi(x)\big) = -\langle x, x \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(l) *(5 P.)* Beweisen Sie, dass $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\det\big(\phi(x+y)\big) + \frac{1}{2}\det\big(\phi(x)\big) + \frac{1}{2}\det\big(\phi(y)\big)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$.