

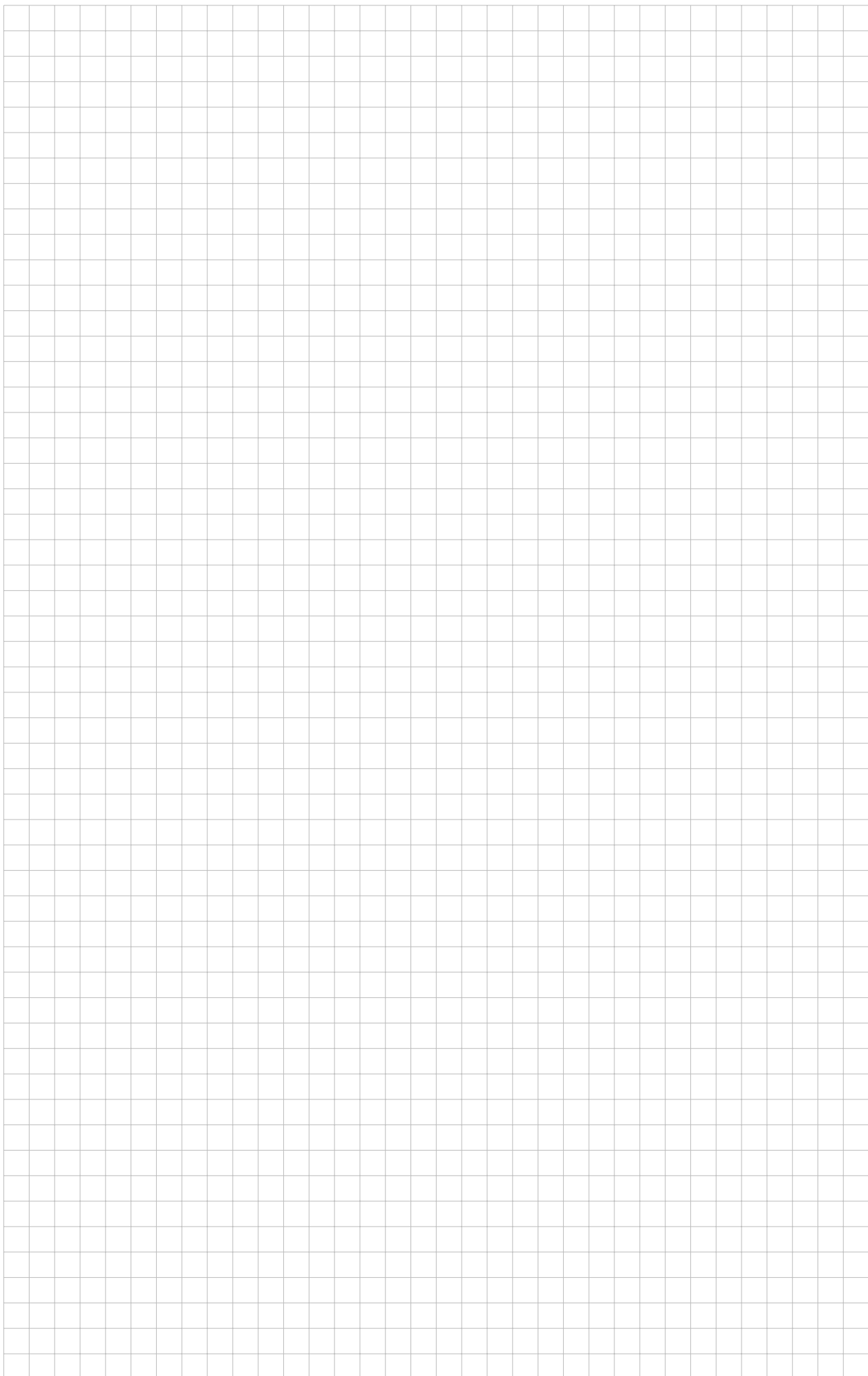
Probeklausur Lineare Algebra für Informatiker

Name:
Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Probeklausur besteht aus vier Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte. Man hat bestanden, wenn man mindestens 50 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	2	3	4	Summe



Aufgabe 1: (56 Punkte)

Sei $V = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 5, p(0) = 0\}$

- (a) Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum über \mathbb{C} ist. (3 Punkte)
- (b) Geben Sie eine Basis von V an. Was ist die Dimension von V . (3 Punkte)
- (c) Sei $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 5 \text{ und } p(-x) = -p(x)\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von V ist. (3 Punkte)
- (d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^5 + x^3 + x, p_2(x) = 2x^3 - 5x, p_3(x) = x\}$ eine Basis von U ist. Was ist die Dimension von U ? (5 Punkte)
- (e) Bestimmen Sie einen Unterraum W von V , sodass $V = U \oplus W$. Was ist die Dimension von W ? (4 Punkte)
- (f) Sei $\phi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x], p(x) \mapsto xp'(x)$. Zeigen Sie, dass ϕ linear ist. Zeigen Sie weiter, dass $\phi(V) \subseteq V$ und $\phi(U) \subseteq U$. (6 Punkte)
- (g) Sei $\psi : U \rightarrow U$ die Einschränkung von ϕ auf U , d.h. $\psi : U \rightarrow U, p(x) \mapsto \phi(p(x))$. Zeigen Sie, dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

- (h) Berechnen Sie die Determinante von ψ . (2 Punkte)
- (i) Ist ψ injektiv, surjektiv oder bijektiv? (3 Punkte)
- (j) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von ψ . (8 Punkte)
- (k) Ist ψ diagonalisierbar? (2 Punkte)
- (l) Sei X der Vektorraum $X := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 4\}$ über \mathbb{C} . Zeigen Sie dass

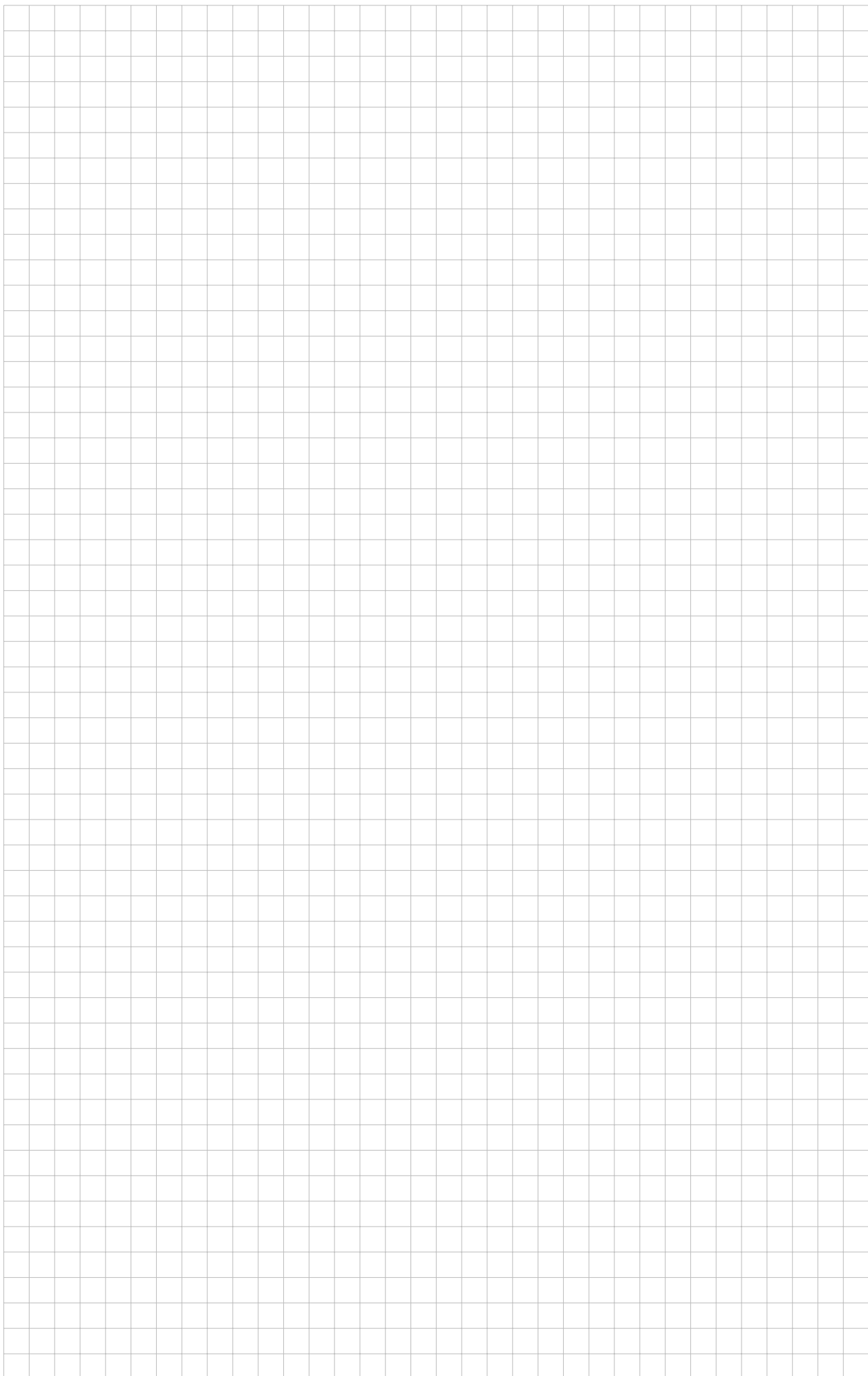
$$f : X \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto xp(x)$$

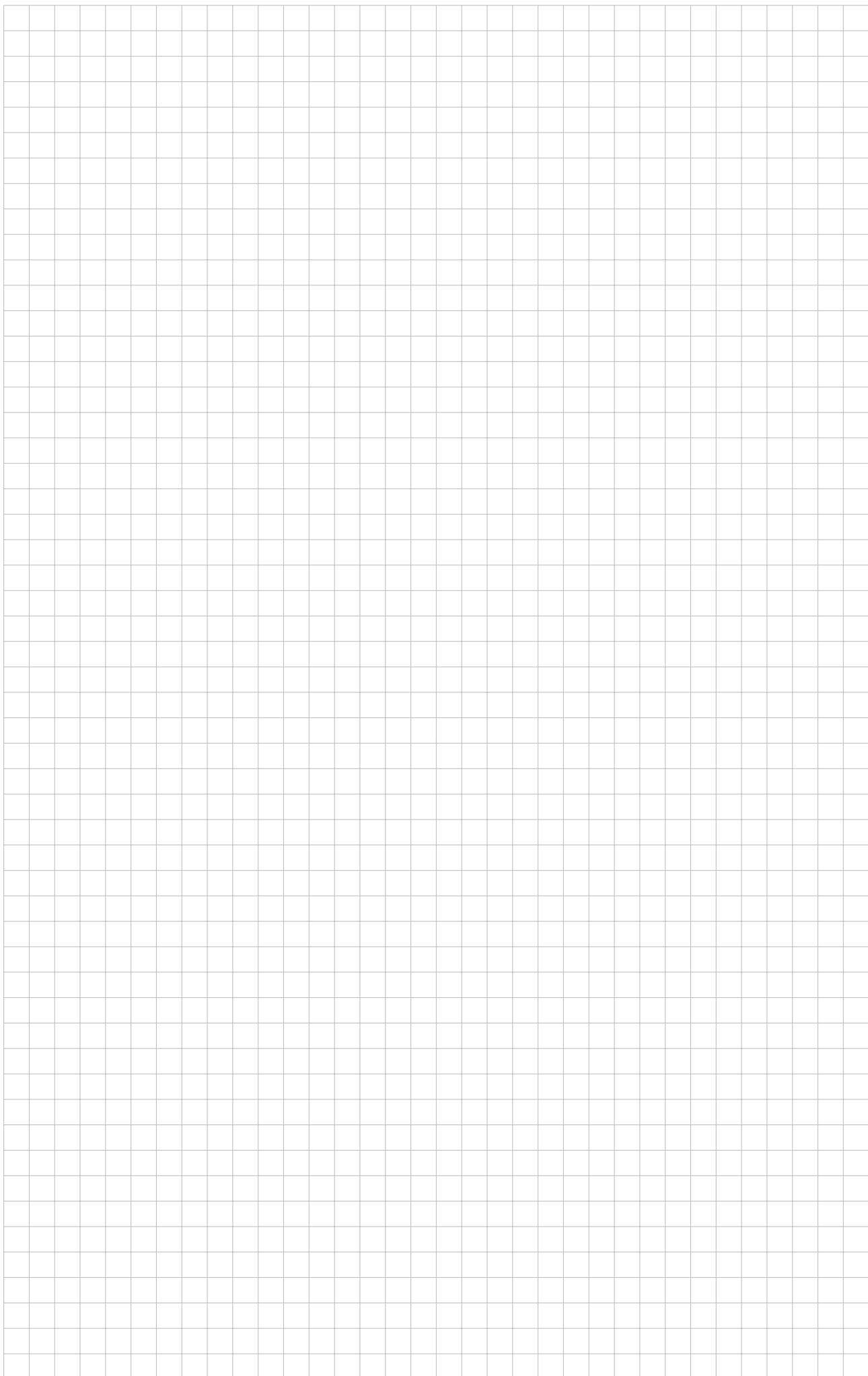
ein linearer Isomorphismus ist. (3 Punkte)

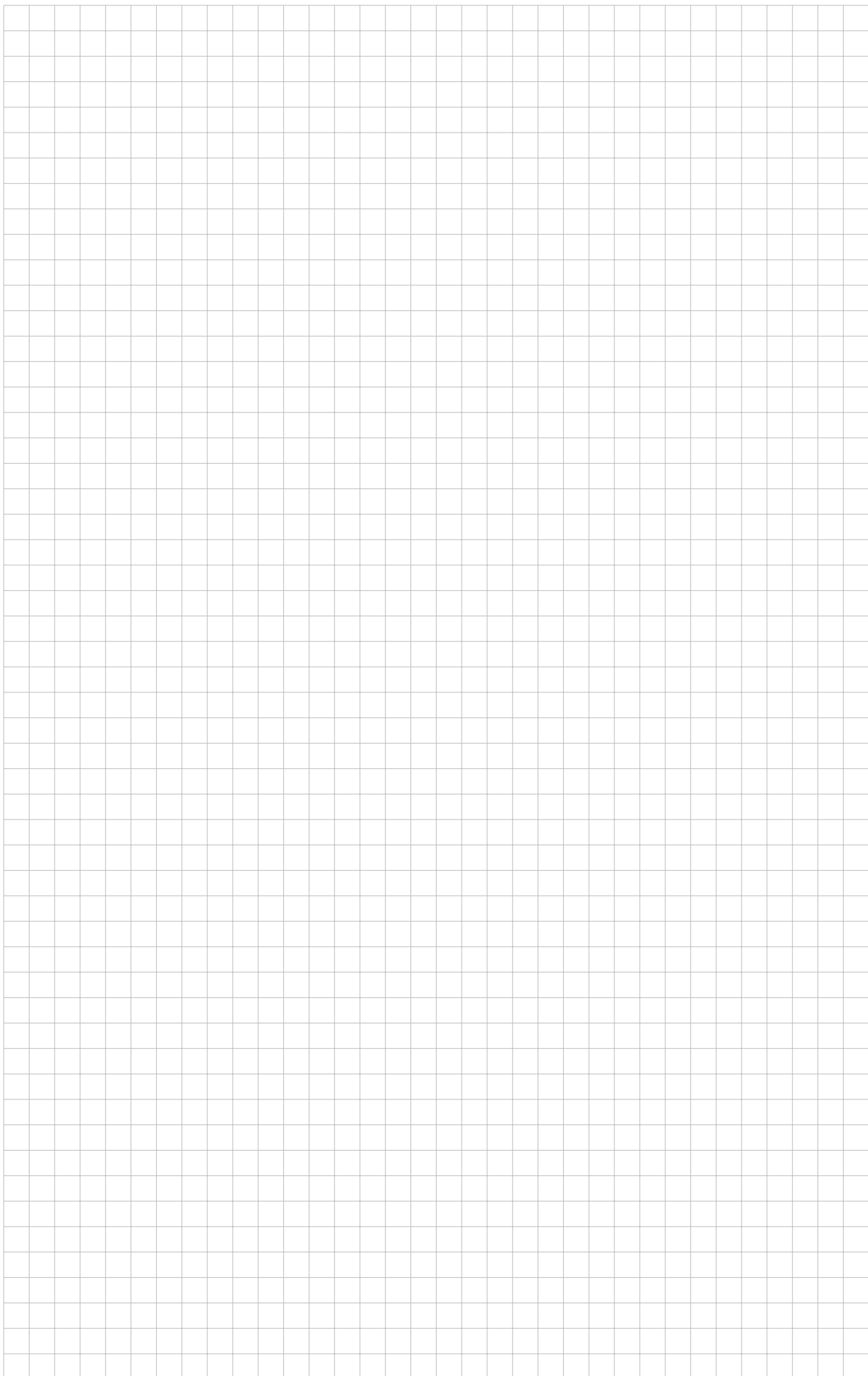
- (m) Sei

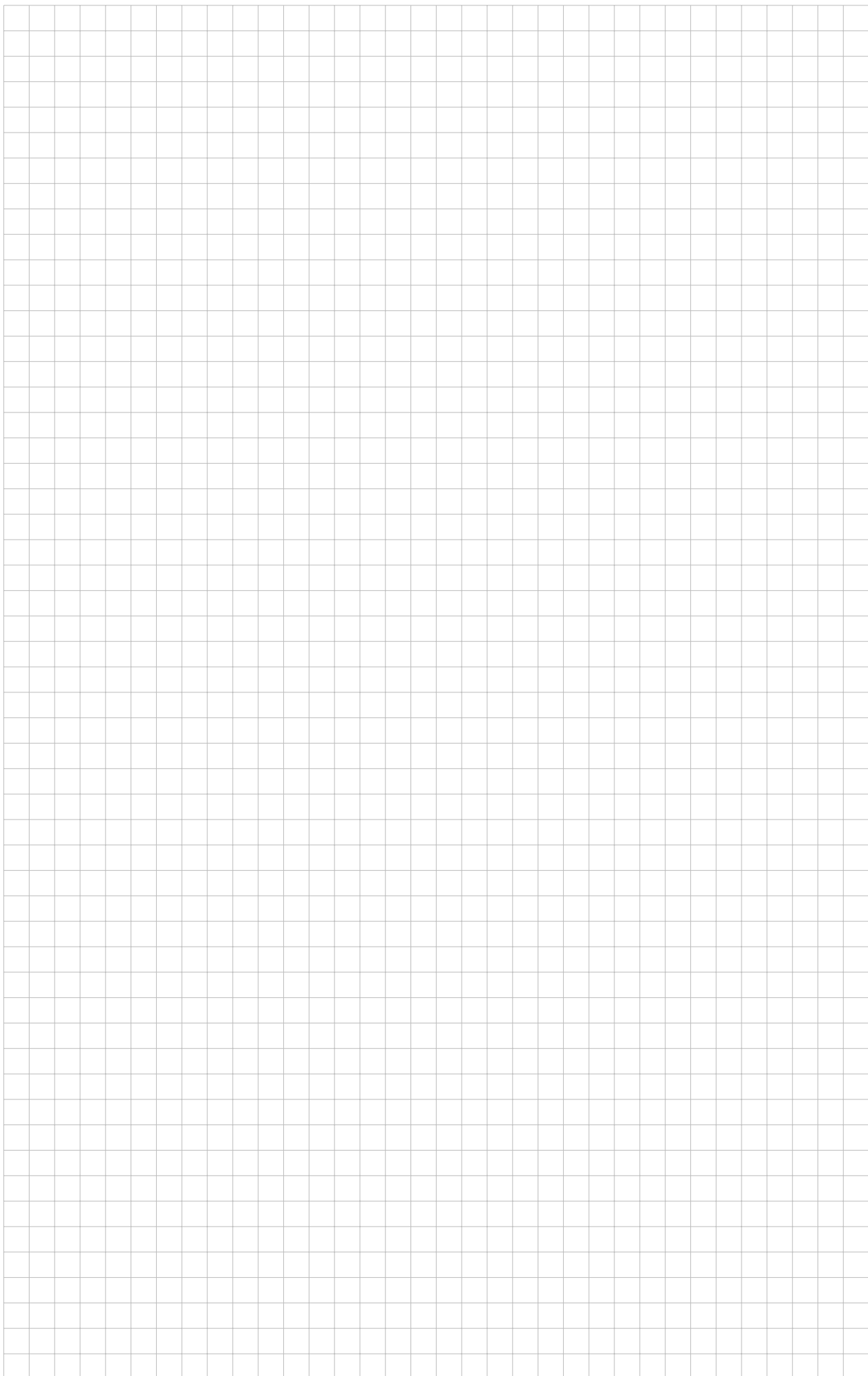
$$\mathcal{C} = \{q_1(x) = 1, q_2(x) = x, q_3(x) = x^2, q_4(x) = x^3, q_5(x) = x^4\}$$
$$\mathcal{D} = \{p_1(x) = x^5, p_2(x) = x^4 + x, p_3(x) = x^3 - x^4, p_4(x) = 2x^2, p_5(x) = x + x^2\}.$$

Sie dürfen annehmen, dass \mathcal{C} eine Basis von X und \mathcal{D} eine Basis von V ist. Bestimmen Sie die Matrizen $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ und $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f^{-1})$. (8 Punkte)









Aufgabe 2: (15 Punkte)

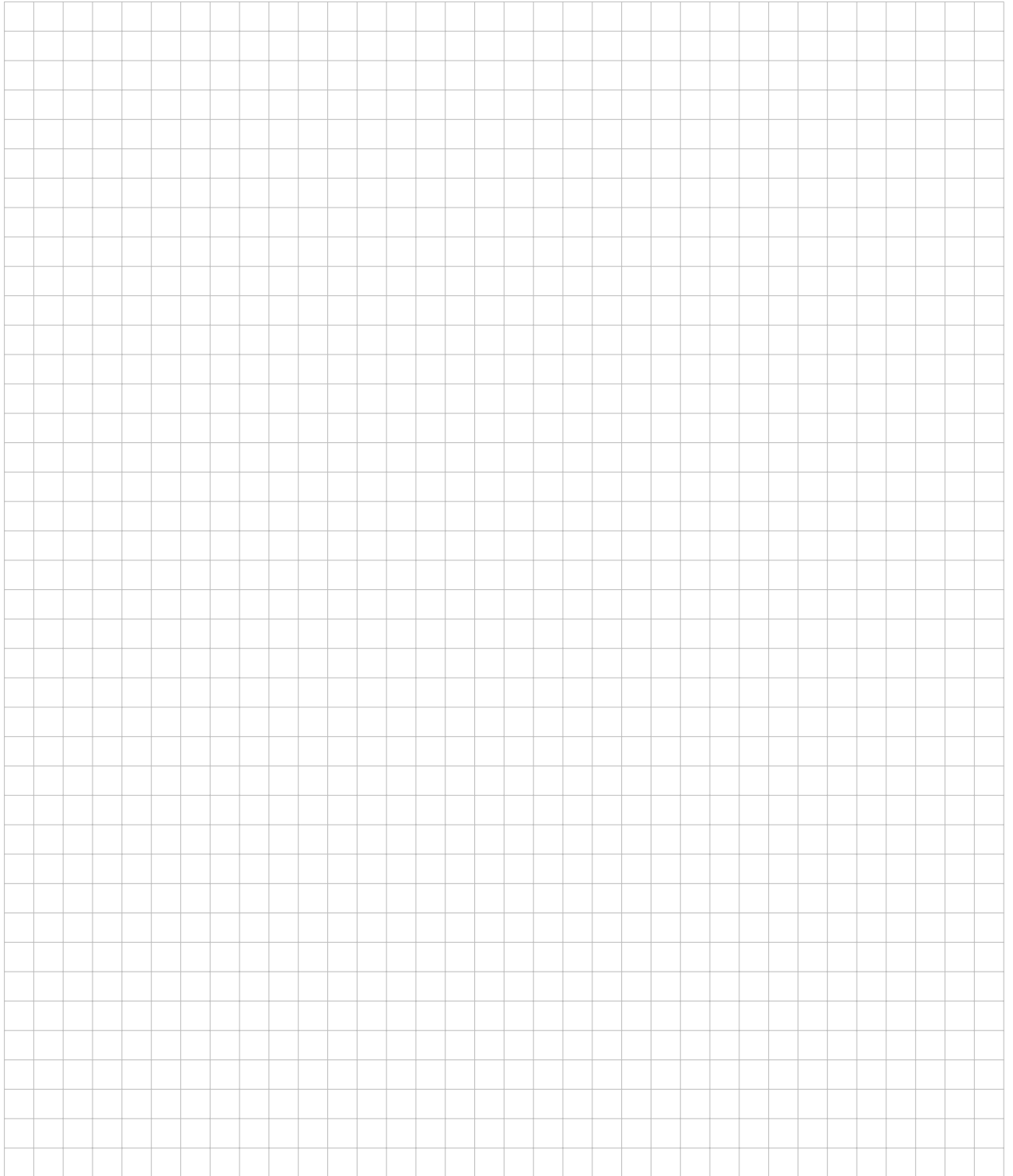
Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^4$ des Gleichungssystems

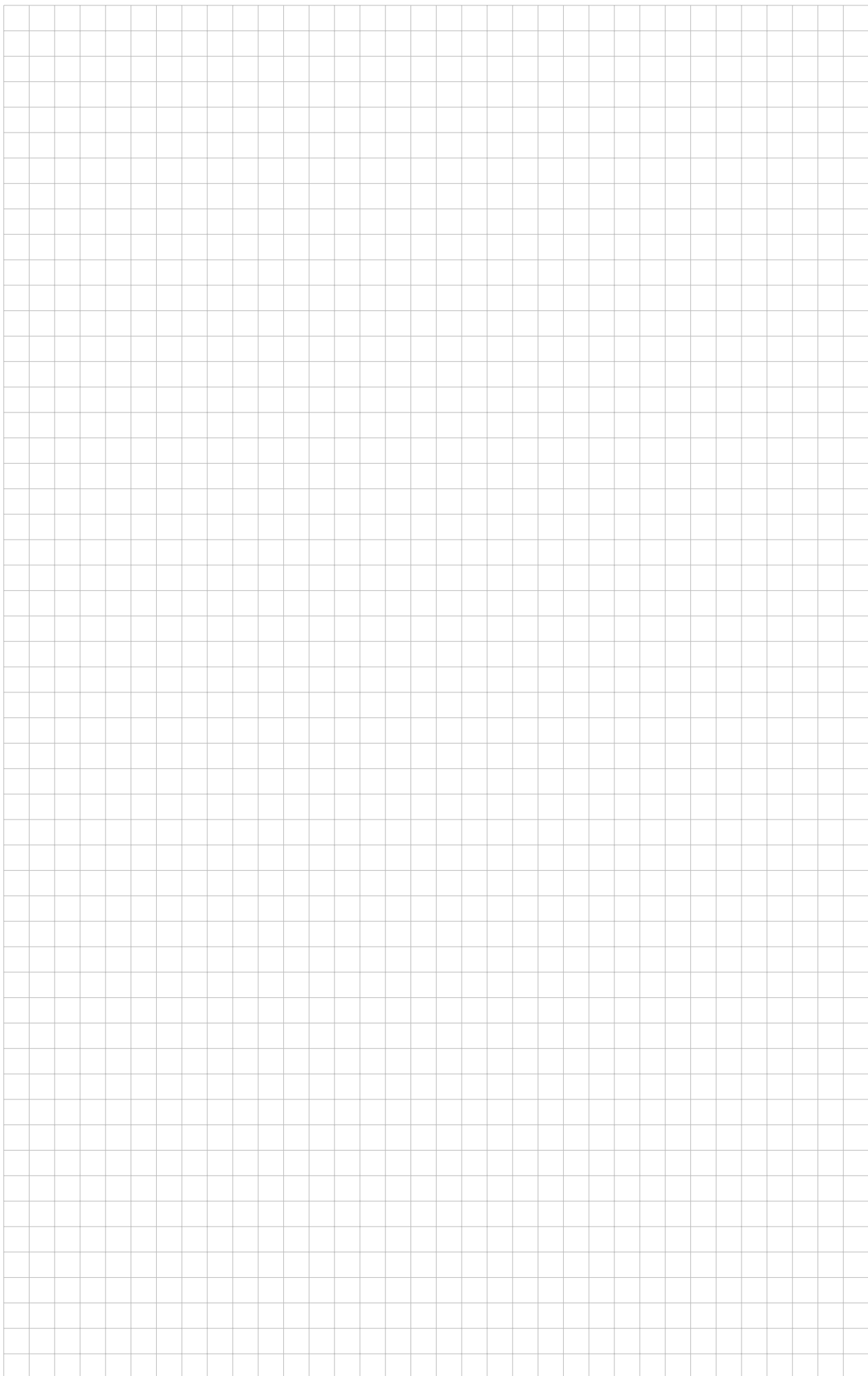
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 1$$

$$9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 2$$

$$x_1 + x_3 = 0$$



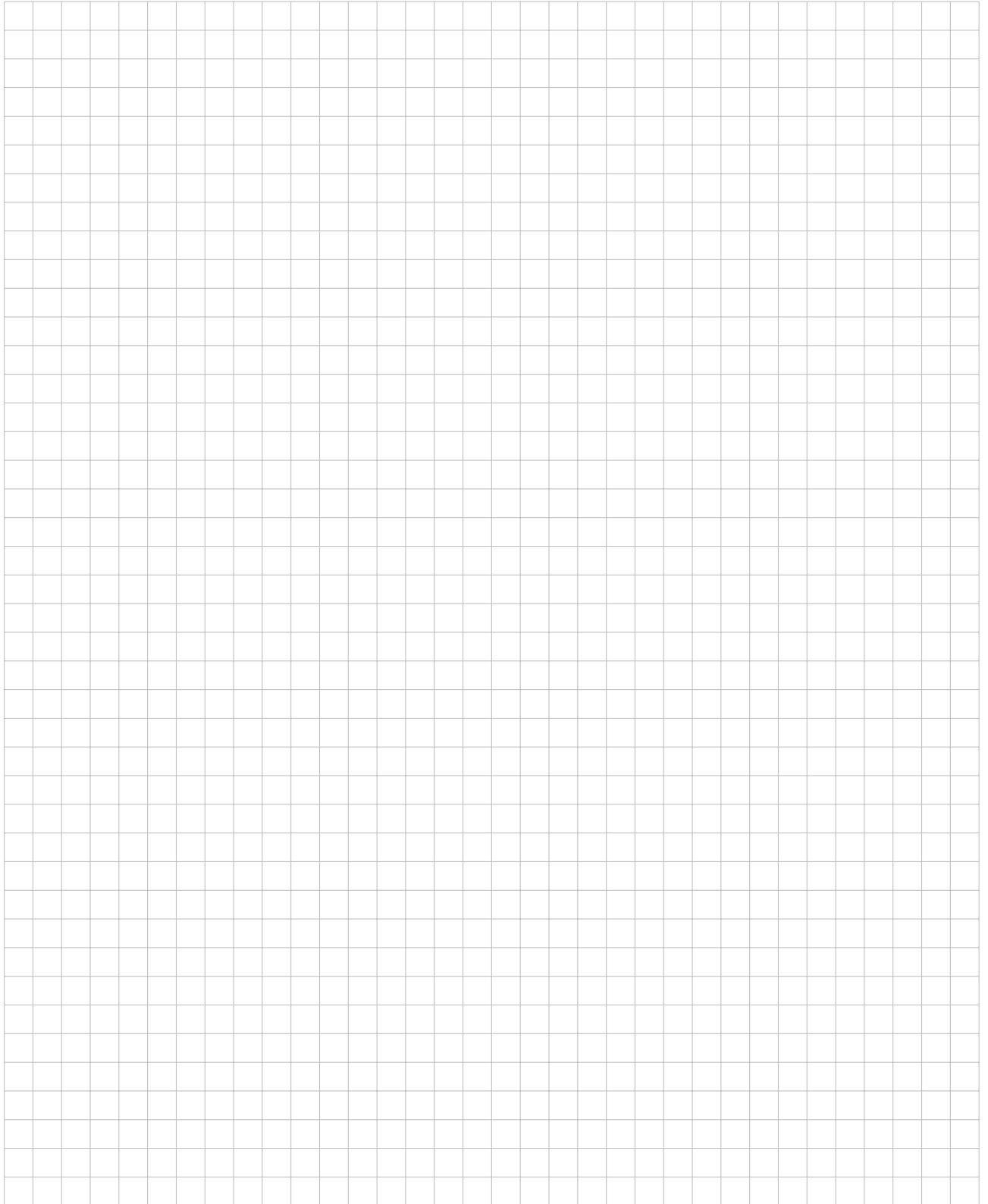


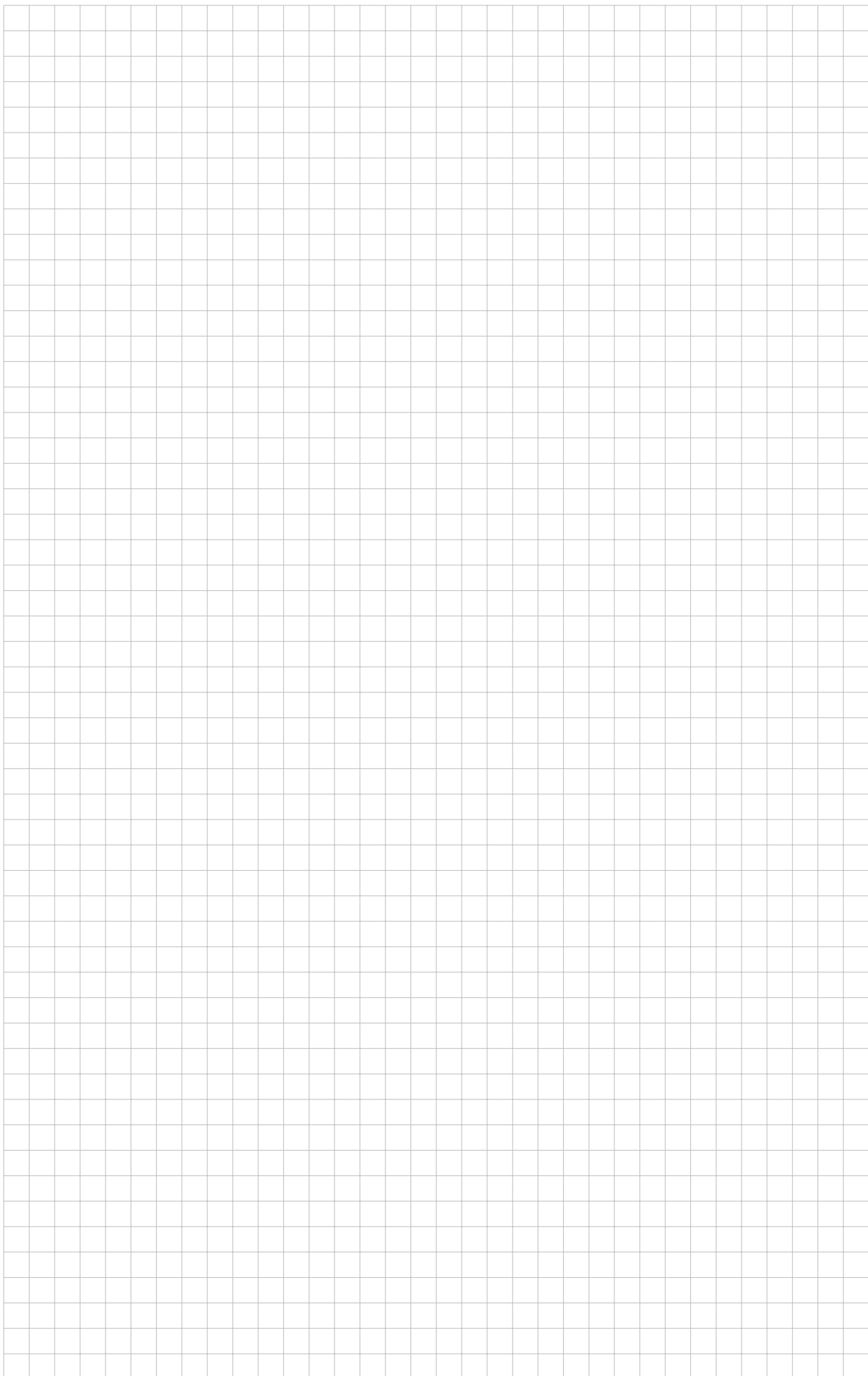
Aufgabe 3: (10 Punkte)

Bestimmen Sie all $s \in \mathbb{R}$, sodass

$$A(s) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2s - 2 & 0 & s \\ 0 & s - 1 & 1 & s \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.





Aufgabe 4: (19 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen.

- (a) Sei V ein Vektorraum und U_1 und U_2 Unterräume von V . Dann ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls ein Unterraum von V . (6 Punkte)
- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit ${}^t A = -A$. Dann ist $\det(A) = 0$. (7 Punkte)
- (c) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Dann ist keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv. (6 Punkte)

