

## Probeklausur Lineare Algebra für Informatiker

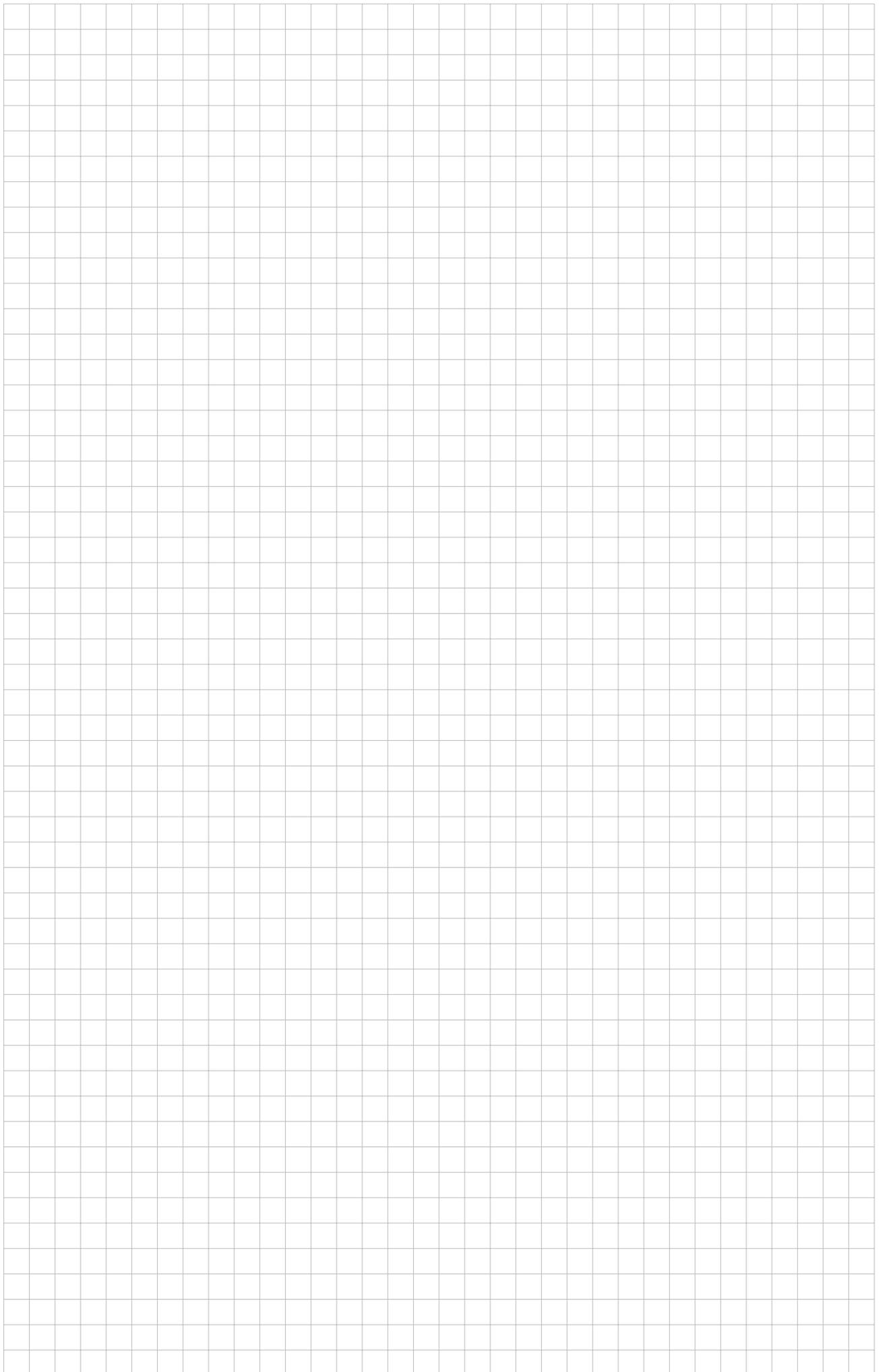
Name:
Matrikelnummer:

### Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Probeklausur besteht aus vier Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte. Man hat bestanden, wenn man mindestens 50 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

---

1	2	3	4	Summe



**Aufgabe 1:** (56 Punkte)

Sei  $V = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 5, p(0) = 0\}$

- (a) Zeigen Sie, dass  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$  ist. (3 Punkte)
- (b) Geben Sie eine Basis von  $V$  an. Was ist die Dimension von  $V$ . (3 Punkte)
- (c) Sei  $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 5 \text{ und } p(-x) = -p(x)\}$ . Zeigen Sie, dass  $U$  ein Unterraum von  $V$  ist. (3 Punkte)
- (d) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^5 + x^3 + x, p_2(x) = 2x^3 - 5x, p_3(x) = x\}$  eine Basis von  $U$  ist. Was ist die Dimension von  $U$ ? (5 Punkte)
- (e) Bestimmen Sie einen Unterraum  $W$  von  $V$ , sodass  $V = U \oplus W$ . Was ist die Dimension von  $W$ ? (4 Punkte)
- (f) Sei  $\phi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x], p(x) \mapsto xp'(x)$ . Zeigen Sie, dass  $\phi$  linear ist. Zeigen Sie weiter, dass  $\phi(V) \subseteq V$  und  $\phi(U) \subseteq U$ . (6 Punkte)
- (g) Sei  $\psi : U \rightarrow U$  die Einschränkung von  $\phi$  auf  $U$ , d.h.  $\psi : U \rightarrow U, p(x) \mapsto \phi(p(x))$ . Zeigen Sie, dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

- (h) Berechnen Sie die Determinante von  $\psi$ . (2 Punkte)
- (i) Ist  $\psi$  injektiv, surjektiv oder bijektiv? (3 Punkte)
- (j) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von  $\psi$ . (8 Punkte)
- (k) Ist  $\psi$  diagonalisierbar? (2 Punkte)
- (l) Sei  $X$  der Vektorraum  $X := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 4\}$  über  $\mathbb{C}$ . Zeigen Sie dass

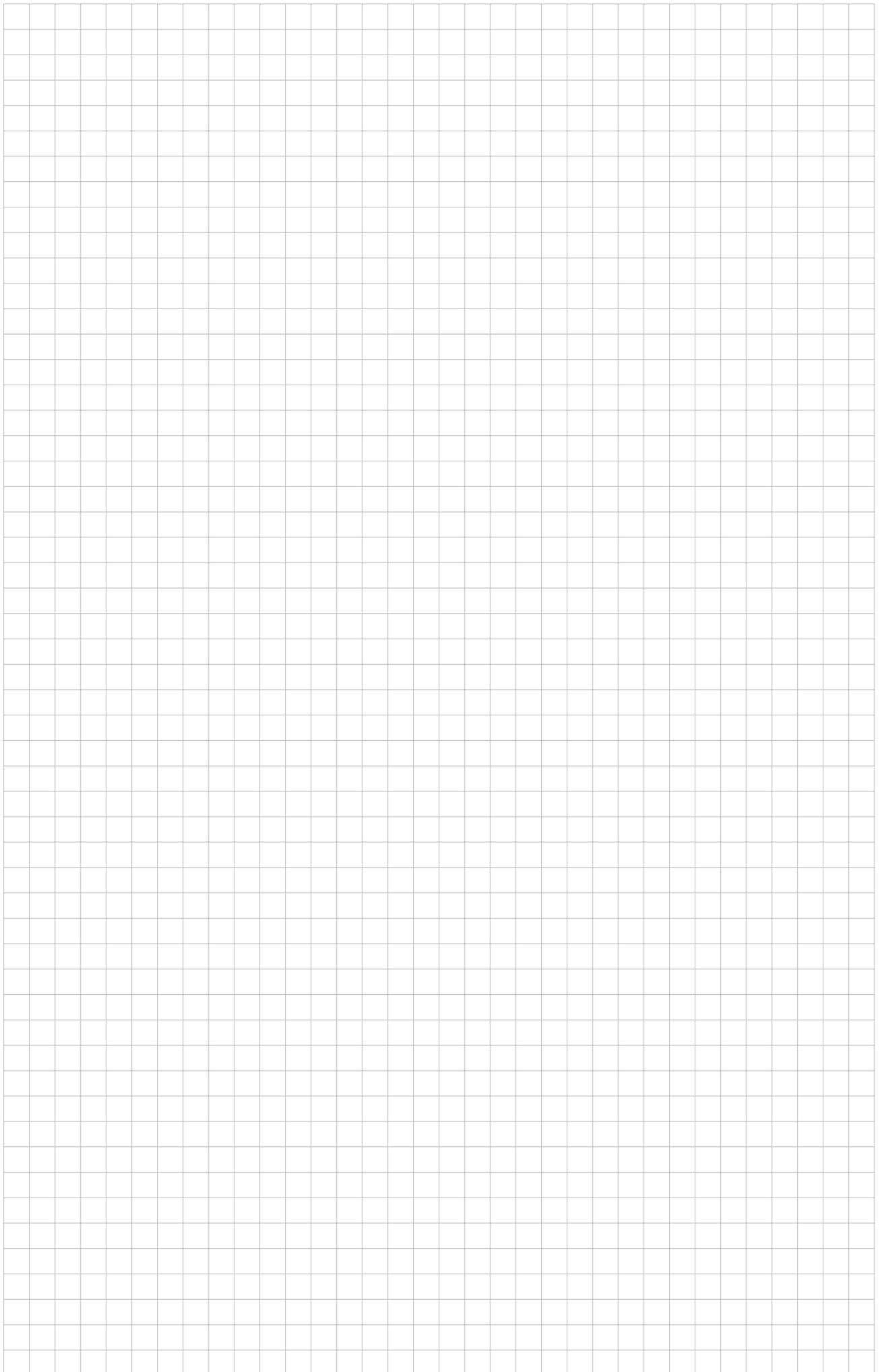
$$f : X \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto xp(x)$$

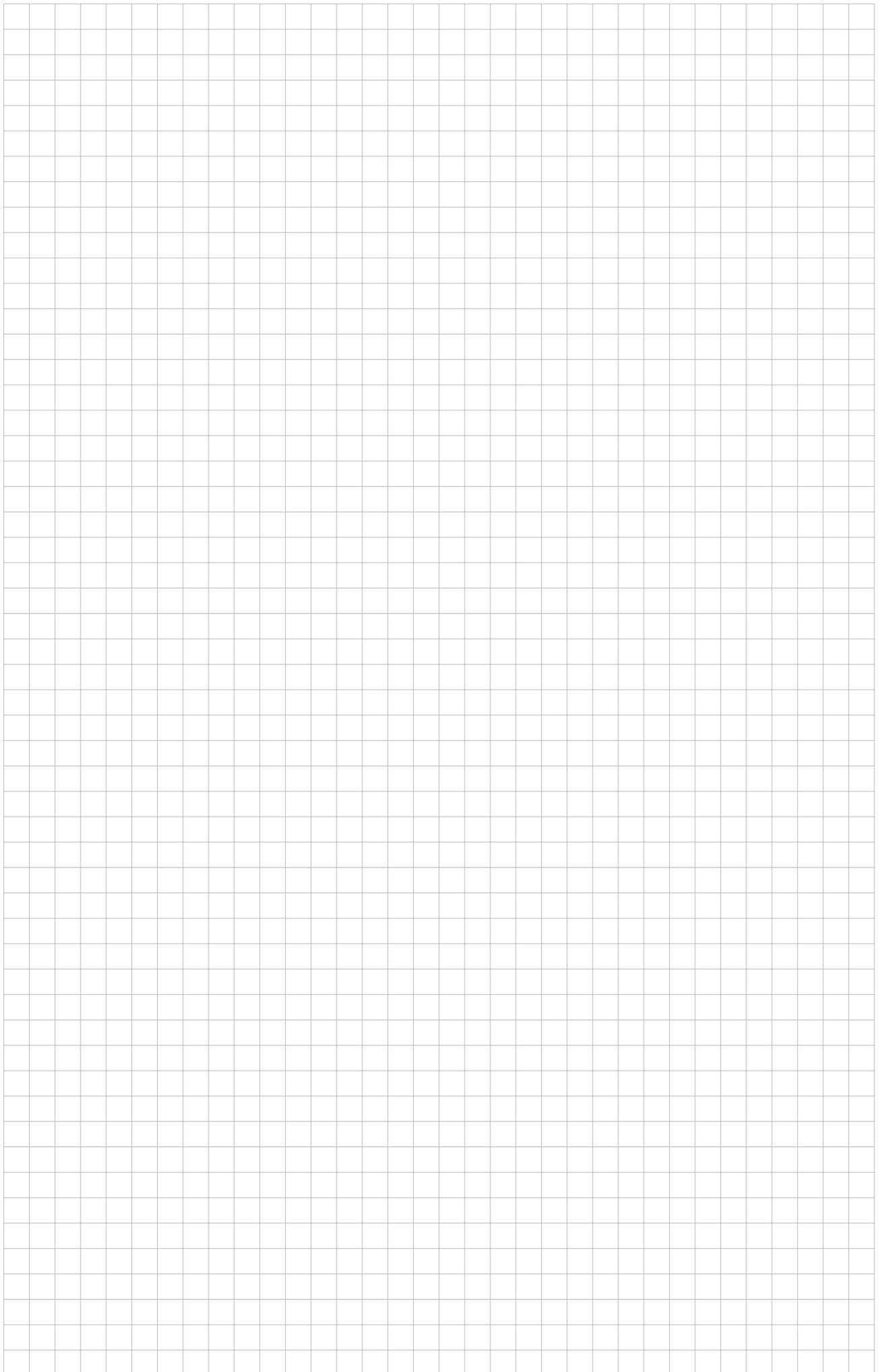
ein linearer Isomorphismus ist. (3 Punkte)

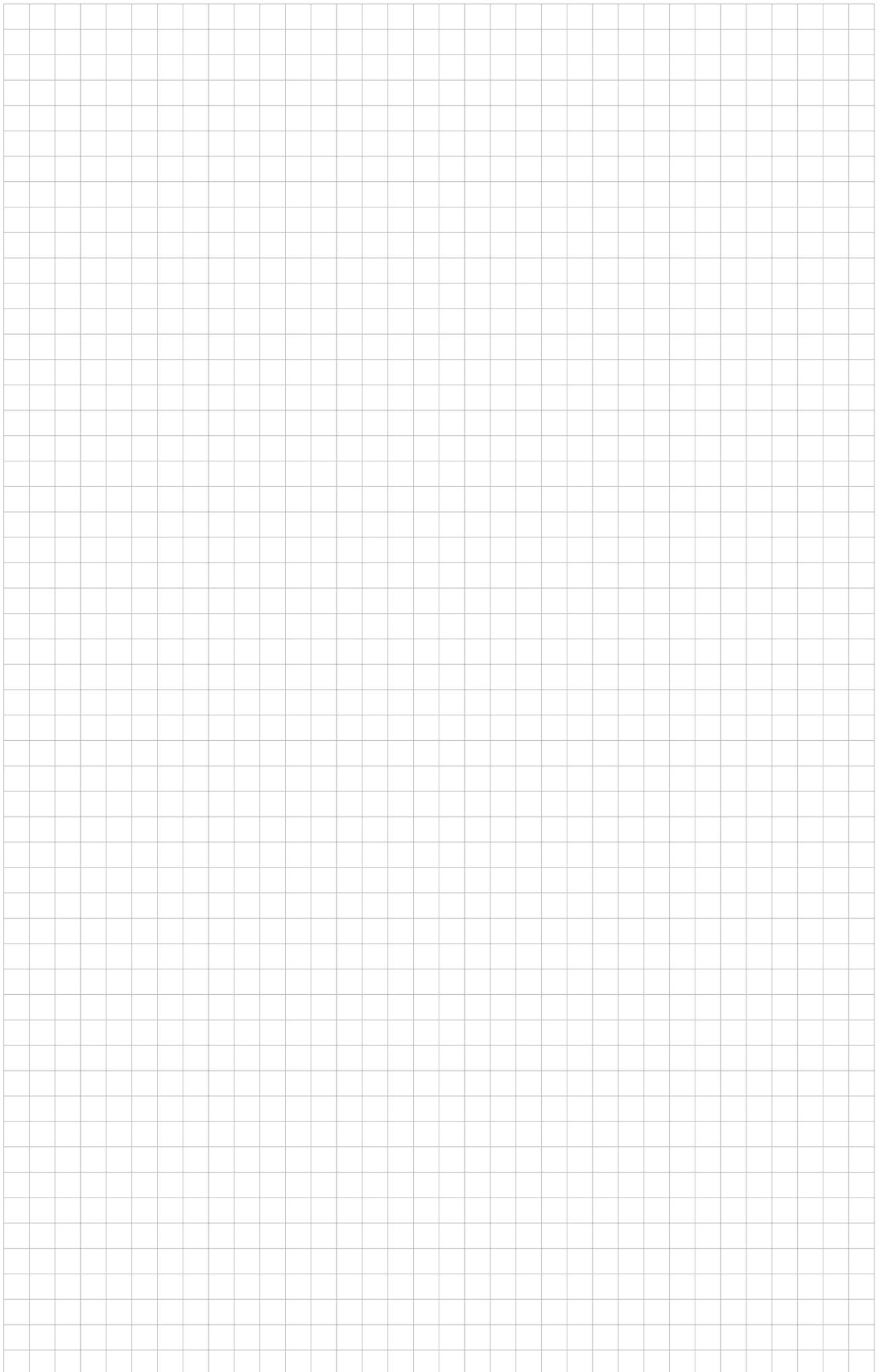
- (m) Sei

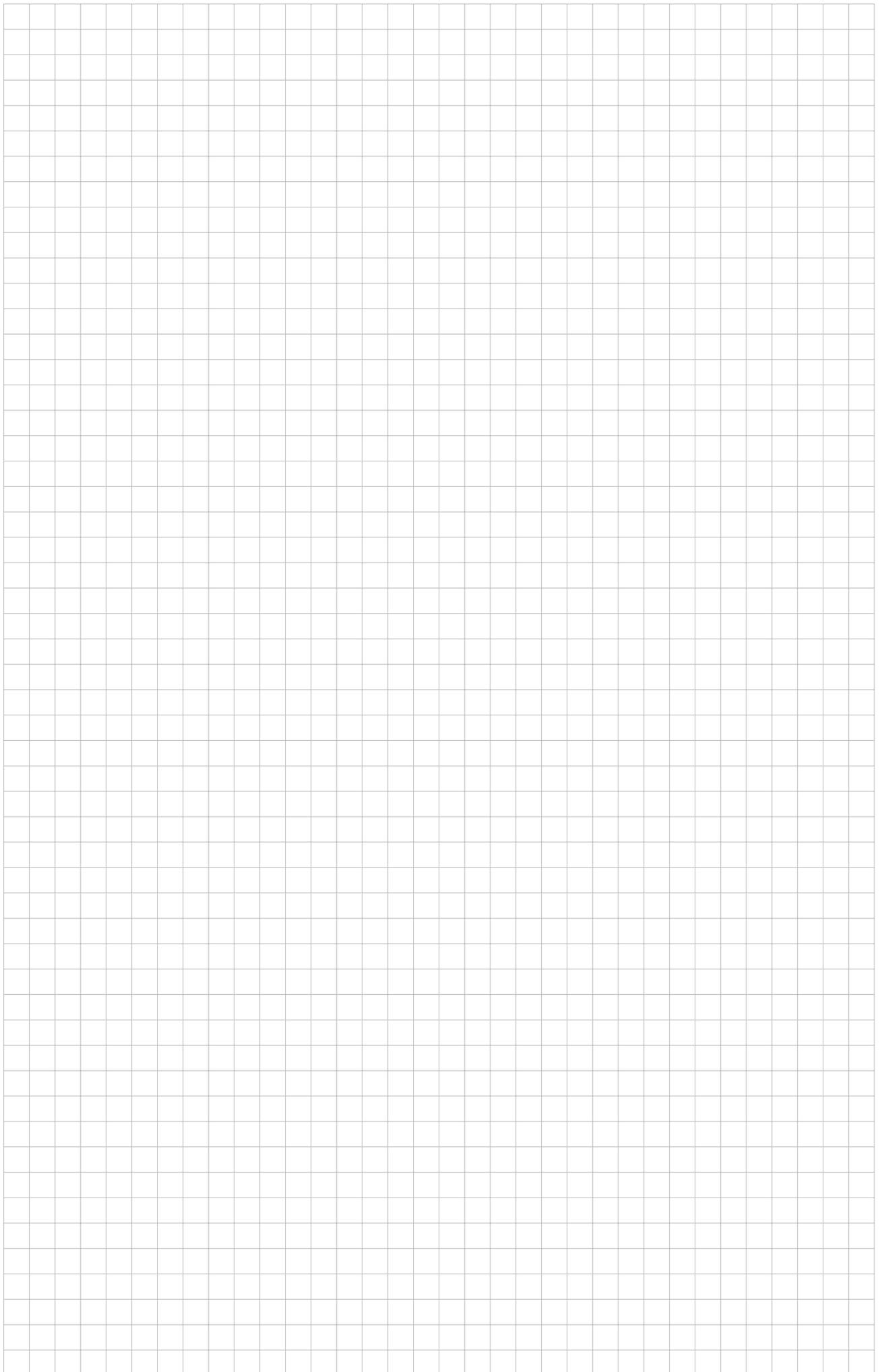
$$\mathcal{C} = \{q_1(x) = 1, q_2(x) = x, q_3(x) = x^2, q_4(x) = x^3, q_5(x) = x^4\}$$
$$\mathcal{D} = \{p_1(x) = x^5, p_2(x) = x^4 + x, p_3(x) = x^3 - x^4, p_4(x) = 2x^2, p_5(x) = x + x^2\}.$$

Sie dürfen annehmen, dass  $\mathcal{C}$  eine Basis von  $X$  und  $\mathcal{D}$  eine Basis von  $V$  ist. Bestimmen Sie die Matrizen  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f)$  und  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f^{-1})$ . (8 Punkte)









**Aufgabe 2:** (15 Punkte)

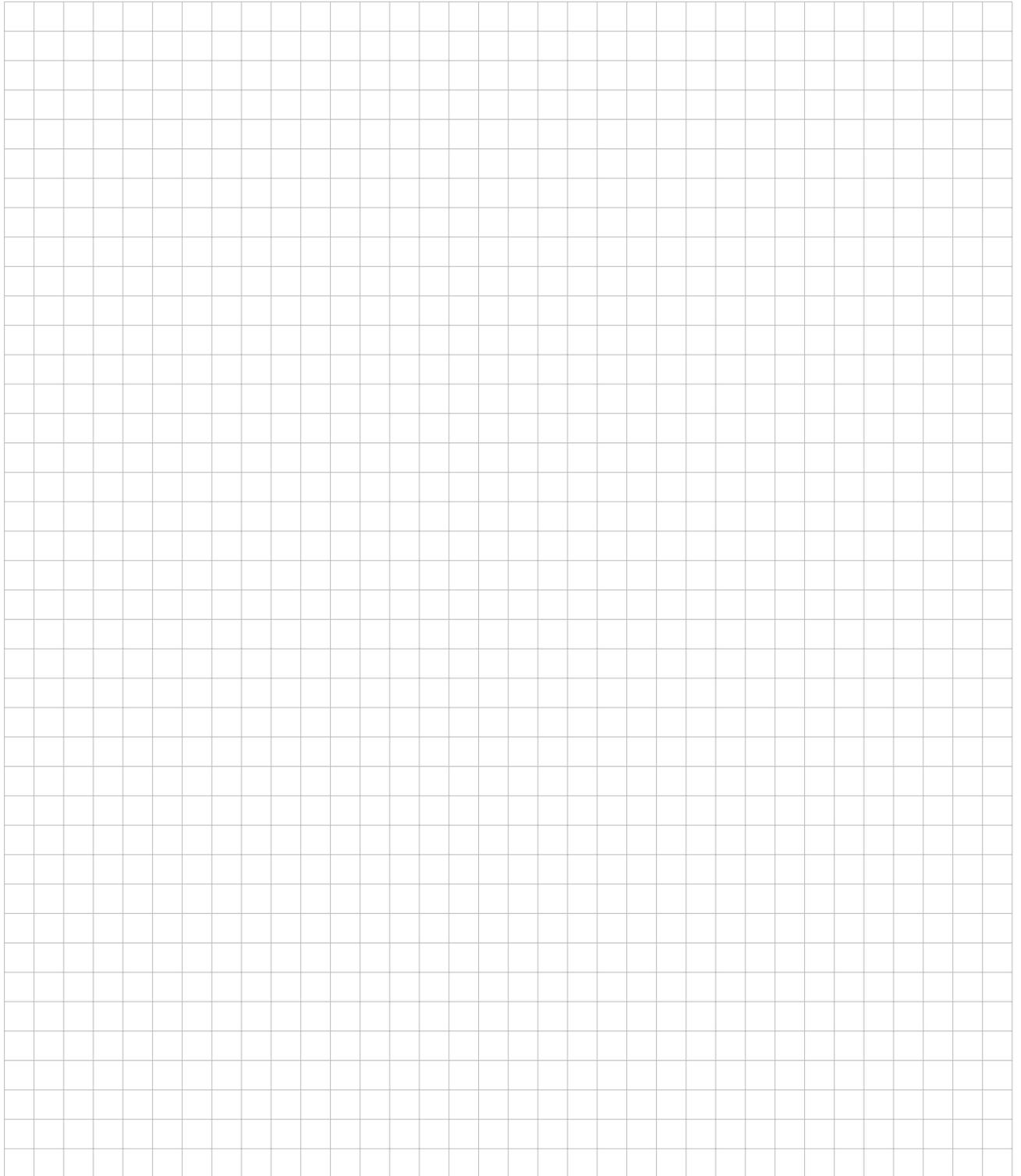
Bestimmen Sie alle Lösungen  $x \in \mathbb{R}^4$  des Gleichungssystems

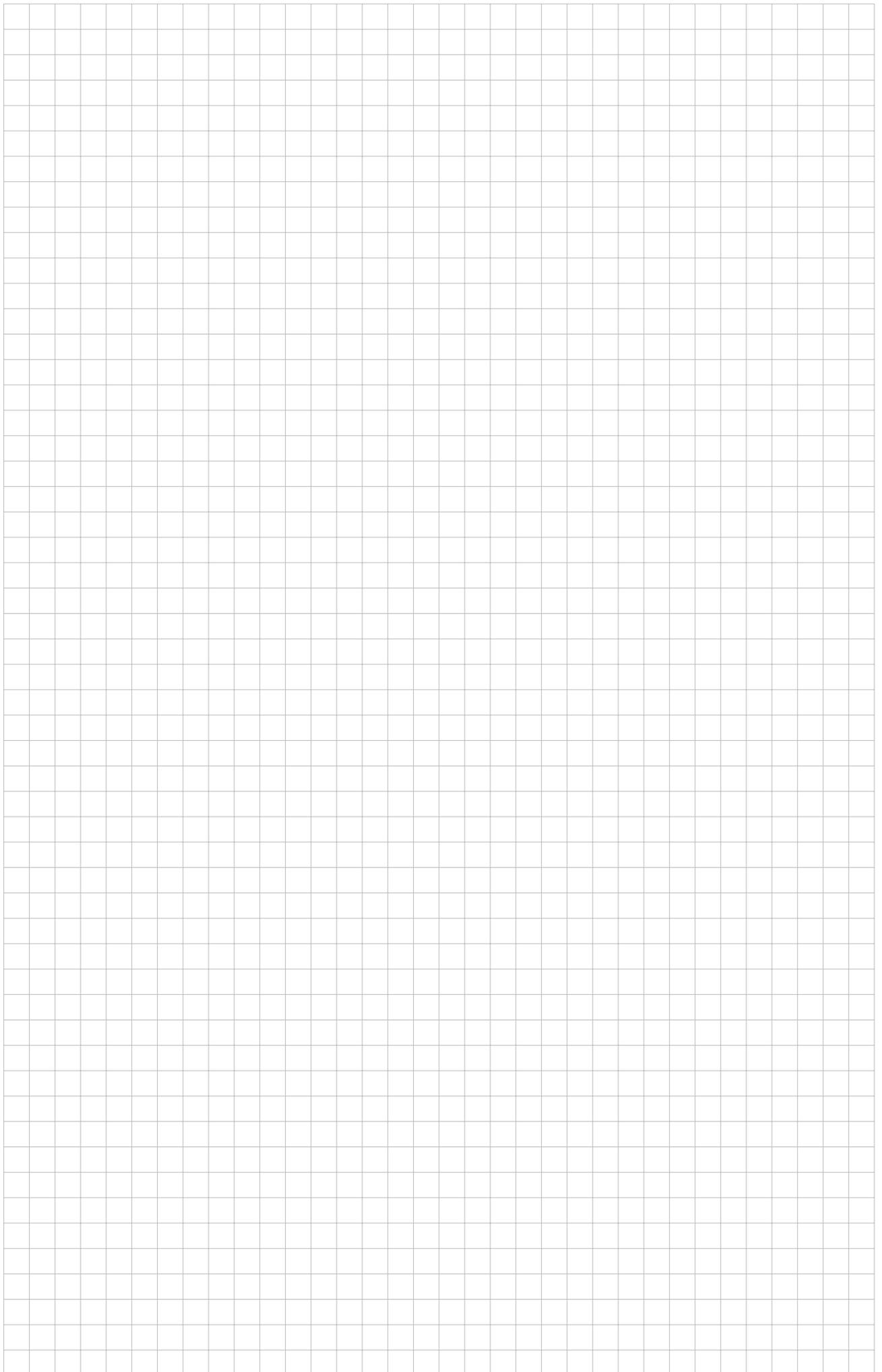
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 1$$

$$9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 2$$

$$x_1 + x_3 = 0$$



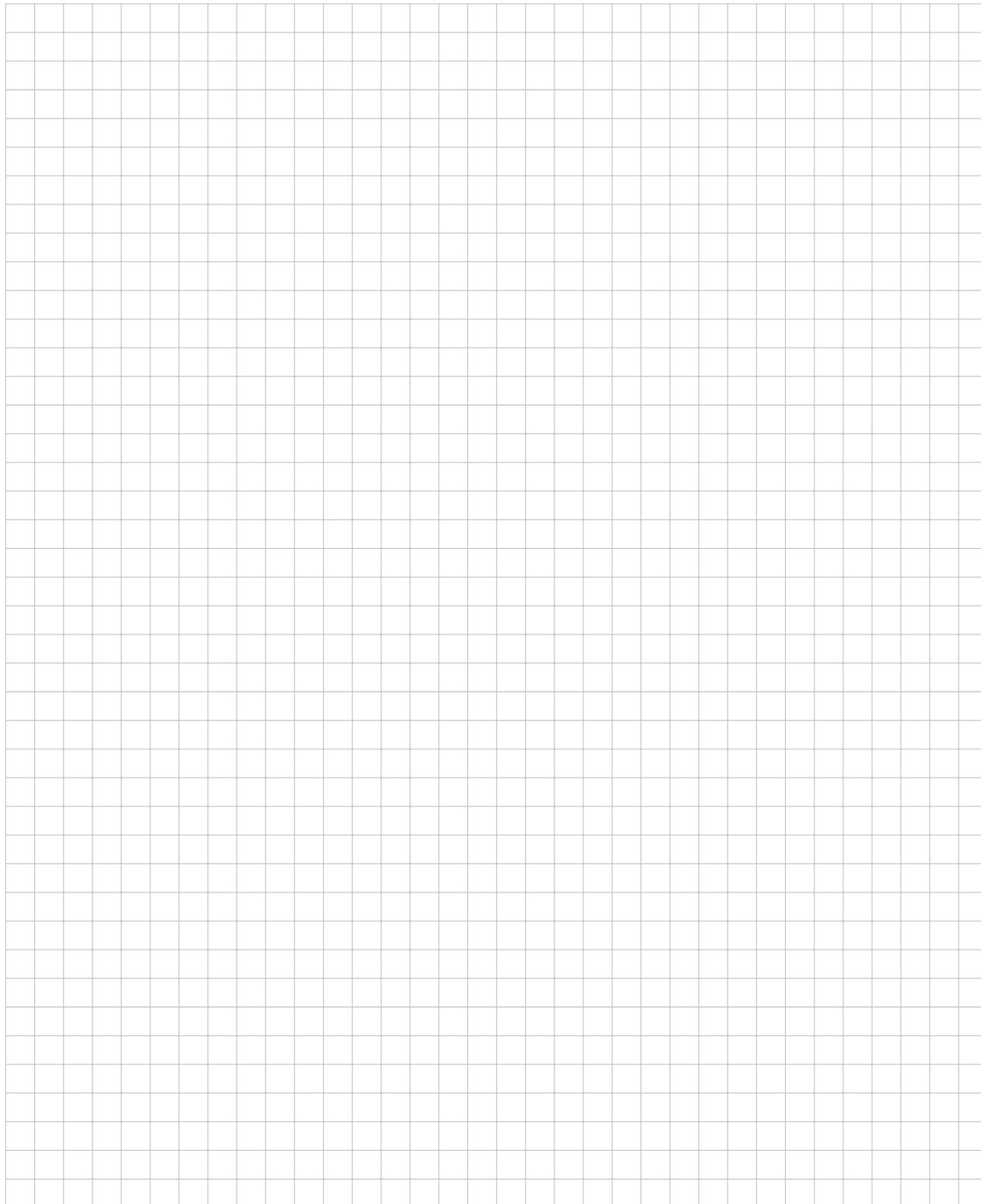


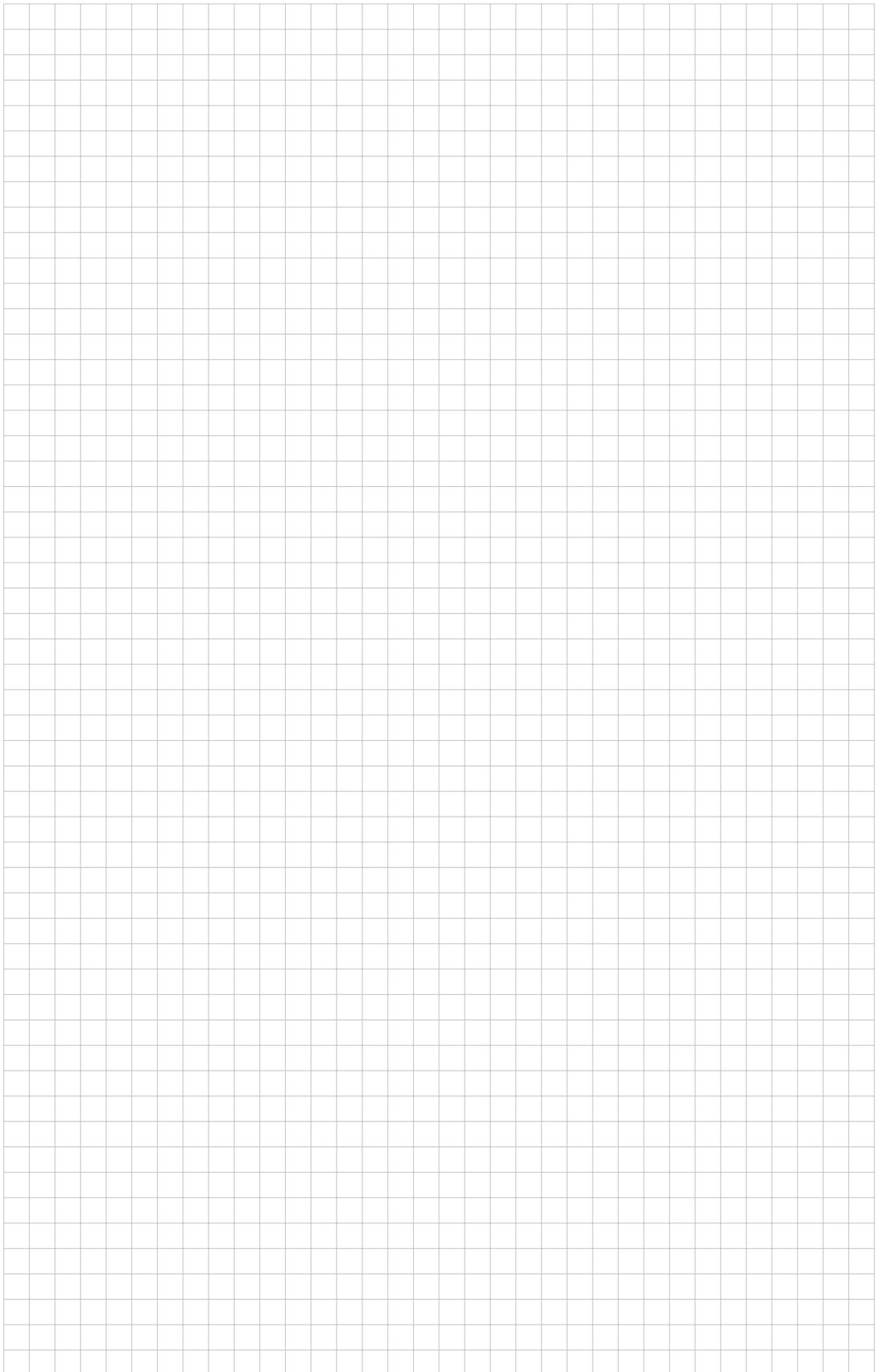
**Aufgabe 3:** (10 Punkte)

Bestimmen Sie all  $s \in \mathbb{R}$ , sodass

$$A(s) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2s - 2 & 0 & s \\ 0 & s - 1 & 1 & s \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.





**Aufgabe 4:** (19 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen.

- (a) Sei  $V$  ein Vektorraum und  $U_1$  und  $U_2$  Unterräume von  $V$ . Dann ist  $U_1 \cup U_2$  ebenfalls ein Unterraum von  $V$ . (6 Punkte)
- (b) Sei  $n \in \mathbb{N}$  ungerade und sei  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  mit  ${}^t A = -A$ . Dann ist  $\det(A) = 0$ . (7 Punkte)
- (c) Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n > m$ . Dann ist keine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  injektiv. (6 Punkte)

