Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Probeklausur
Lineare Algebra für Informatiker

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Probeklausur besteht aus vier Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte. Man hat bestanden, wenn man mindestens 50 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**Summe**

Aufgabe 1: (56 Punkte)
Sei $V = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg\big(p(x)\big) \leq 5, p(0) = 0\}$

(a) Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Geben Sie eine Basis von V an. Was ist die Dimension von V. *(3 Punkte)*

(c) Sei $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg\big(p(x)\big) \leq 5$ und $p(-x) = -p(x)\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von V ist. *(3 Punkte)*

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^5 + x^3 + x, p_2(x) = 2x^3 - 5x, p_3(x) = x\}$ eine Basis von U ist. Was ist die Dimension von U? *(5 Punkte)*

(e) Bestimmen Sie einen Unterraum W von V, sodass $V = U \oplus W$. Was ist die Dimension von W? *(4 Punkte)*

(f) Sei $\phi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, $p(x) \mapsto xp'(x)$. Zeigen Sie, dass ϕ linear ist. Zeigen Sie weiter, dass $\phi(V) \subseteq V$ und $\phi(U) \subseteq U$. *(6 Punkte)*

(g) Sei $\psi : U \to U$ die Einschränkung von ϕ auf U, d.h. $\psi : U \to U$, $p(x) \mapsto \phi\big(p(x)\big)$. Zeigen Sie, dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

(h) Berechnen Sie die Determinante von ψ. *(2 Punkte)*

(i) Ist ψ injektiv, surjektiv oder bijektiv? *(3 Punkte)*

(j) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von ψ. *(8 Punkte)*

(k) Ist ψ diagonalisierbar? *(2 Punkte)*

(l) Sei X der Vektorraum $X := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg\big(p(x)\big) \leq 4\}$ über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie dass

$$f : X \to V, \quad p(x) \mapsto xp(x)$$

ein linearer Isomorphismus ist. *(3 Punkte)*

(m) Sei

$$\mathcal{C} = \{q_1(x) = 1, q_2(x) = x, q_3(x) = x^2, q_4(x) = x^3, q_5(x) = x^4\}$$
$$\mathcal{D} = \{p_1(x) = x^5, p_2(x) = x^4 + x, p_3(x) = x^3 - x^4, p_4 = 2x^2, p_5(x) = x + x^2\}.$$

Sie dürfen annehmen, dass $\mathcal{C}$ eine Basis von X und $\mathcal{D}$ ein Basis von V ist. Bestimmen Sie die Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1})$. *(8 Punkte)*

Aufgabe 2: (15 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^4$ des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\\
&5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 1\\
&9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 2\\
&x_1 + x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Bestimmen Sie all $s \in \mathbb{R}$, sodass

$$A(s) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2s-2 & 0 & s \\ 0 & s-1 & 1 & s \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 4: (19 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen.

(a) Sei V ein Vektorraum und U_1 und U_2 Unterräume von V. Dann ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls ein Unterraum von V. *(6 Punkte)*

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit ${}^tA = -A$. Dann ist $\det(A) = 0$. *(7 Punkte)*

(c) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Dann ist keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injektiv. *(6 Punkte)*