Universität Paderborn Sommersemester 2024
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

# Lineare Algebra für Informatiker

## 6. Hausaufgabenblatt - Lösungen

**Hausaufgabe 6.1** Bestimmen Sie für jede der folgenden Paaren von Vektorräume $V$ über $\mathbb{R}$ und Teilmengen $U$ von $V$, ob $U$ ein Unterraum von $V$ ist und bestimmen Sie gegebenenfals eine Basis und die Dimension von $U$.

(a) $V = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, $U = \{A \in V : A \text{ ist antisymmetrisch}\}$
*Lösung:* $U$ ist ein Unterraum:

- $O \in U$
- Wenn $X, Y \in U$, dann gilt
$$^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY = -X - Y = -(X+Y).$$
Darum gilt $X + Y \in U$.
- Wenn $X \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt
$$^t(\lambda X) = \lambda^t X = -\lambda X.$$
Darum gilt $\lambda X \in U$.

Für $1 \leq i, j \leq n$ sei $E_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ die Matrix, bei der der Matrixkoeffizient in Zeile $i$ und Spalte $j$ gleich 1 ist und alle anderen Matrixkoeffizienten gleich 0 sind. Dann ist $\mathcal{B} = \{E_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Wenn $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, dann gilt genau dann $X \in U$, wenn $x_{ij} = -x_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Für $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in U$ folgt

$$\begin{aligned} X &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \big(x_{i,j}E_{i,j} + x_{j,i}E_{j,i}\big) \\ &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \big(x_{i,j}E_{i,j} - x_{i,j}E_{j,i}\big) \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} x_{i,j}\big(E_{i,j} - E_{j,i}\big) \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $U = \mathrm{span}(\{E_{i,j} - E_{j,i} : 1 \leq i < j \leq n\})$. Wenn $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i < j \leq n$ und $\sum_{1\leq i<j\leq n} c_{i,j}\big(E_{i,j} - E_{j,i}\big) = 0$, dann

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} c_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\leq j<i\leq n} c_{j,i}E_{i,j} = 0.$$

Weil $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist, folgt dass alle $c_{i,j}$ gleich 0 sind. Dies zeigt, dass $\{E_{i,j} - E_{j,i} : 1 \leq i < j \leq n\}$ eine Basis von $U$ ist. Es gilt

$$\dim(U) = |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n\}| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{x \in V : x_1 = 2x_3\}$
*Lösung:* $U$ ist ein Unterraum

- $O \in U$
- Wenn $x, y \in U$, dann $(x+y)_1 = x_1 + y_1 = 2x_3 + 2y_3 = 2(x+y)_3$ und darum $x + y \in U$.
- Wenn $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann $(\lambda x)_1 = \lambda x_1 = \lambda 2x_3 = 2(\lambda x)_3$ und darum $\lambda x \in U$.

Wenn $x \in U$, dann $x_1 = 2x_3$, und darum

$$x = (2c, b, c, d) = b(0,1,0,0) + c(2,0,1,0) + d(0,0,0,1)$$

für bestimmte $b, c, d \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $U = \operatorname{span}(\{(0,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\})$. Wenn $b, c, d \in \mathbb{R}$ und $b(0,1,0,0)+c(2,0,1,0)+d(0,0,0,1) = O$, dann $(2c, b, c, d) = (0,0,0,0)$ und damit $b = c = d = 0$. Die Menge $\{(0,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ ist deshalbe eine Basis von $U$.

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{x \in V : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$
*Lösung:* $U$ is kein Unterraum: $(1,1,0,0), (1,-1,0,0) \in U$, aber

$$(1,1,0,0) + (1,-1,0,0) = (2,0,0,0) \notin U.$$

**Hausaufgabe 6.2** Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K) : A \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$$

ein Unterring von $\mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist.
*Lösung:* Wenn $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, dann gilt genau dann $X \in U$, wenn $x_{i,j} = 0$ für alle $1 \le j < i \le n$. Die Einheitsmatrix $I_n$ besitzt diese Eigenschaft und darum $I_n \in U$. Für alle $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}, Y = (y_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in U$ folgt für alle $1 \le j < i \le n$

$$\begin{aligned} (X+Y)_{i,j} &= x_{i,j} + y_{i,j} = 0 + 0 = 0, \\ (XY)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} y_{k,j} = \sum_{i \le k \le j} x_{i,k} y_{k,j} = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist gleich 0 weil $i > j$. Es folgt, dass $X + Y, XY \in U$. Wenn $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, dann gilt $(-X)_{i,j} = -x_{i,j} = 0$ für alle $1 \le j < i \le n$. Darum $-X \in U$. Es folgt, dass $U$ ein Unterring von $\mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist.

**Hausaufgabe 6.3** Sei $K$ ein Körper und sei $A \in \mathrm{Mat}_{4,4}(K)$ sodass $A_{i,j} = 0$ für alle $i, j$ mit $1 \le i \le j \le 4$. Zeigen Sie, dass es eine $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^n = 0$ die Nullmatrix ist.
*Lösung:* $A$ ist eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalmatrixkoeffizienten gleich 0. Wenn $1 \le k \le 4$, dann $A_{i,k} = 0$ für alle $i \le k$ und $A_{k,j}$ für alle $j \ge k$. Für alle $1 \le i, j \le 4$ gilt

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{4} A_{i,k} A_{k,j} = \sum_{j+1 \le k \le i-1} A_{i,k} A_{k,j}.$$

Die Summe ist gleich 0, falls $i-1 < j+1$, d.h. $(A^2)_{i,j} = 0$, falls $i \leq j+1$. Wenn $1 \leq k \leq 4$, dann $A_{i,k} = 0$ für alle $i \leq k+1$ und $A_{k,j}$ für alle $j+1 \geq k$. Für alle $1 \leq i,j \leq 4$ gilt darum

$$(A^4)_{i,j} = \sum_{k=1}^{4} (A^2)_{i,k}(A^2)_{k,j} = \sum_{j+2 \leq k \leq i-2} (A^2)_{i,k}(A^2)_{k,j}.$$

Weil $j \geq 1 \geq i-3$ für alle $1 \leq i,j \leq 4$, gilt $j+2 > i-2$ für alle $1 \leq i,j \leq 4$. Es folgt, dass $(A^4)_{i,j} = 0$ für alle $1 \leq i,j \leq 4$ und damit $A^4 = 0$.

**Hausaufgabe 6.4** Bestimmen Sie alle $s,t,u \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s & 7+2t & -3t+2 & s+t-1 \\ -5 & -16 & 20 & -12 \\ -t+10 & -2s & 7+u & -21 \\ 7 & 21 & -26 & 15 \end{pmatrix}$$

*Lösung:* Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_{s,t,u} = \begin{pmatrix} s & 7+2t & -3t+2 & s+t-1 \\ -5 & -16 & 20 & -12 \\ -t+10 & -2s & 7+u & -21 \\ 7 & 21 & -26 & 15 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
(AB_{s,t,u})_{1,1} &= 0s - 15 + 4(-t+10) + 56 = 81 - 4t, \\
(AB_{s,t,u})_{4,1} &= s - 10 + 4(-t+10) + 35 = 65 + s - 4t, \\
(AB_{s,t,u})_{1,3} &= 0(-3t+2) + 60 + 4(7+u) - 208 = -120 + 4u.
\end{aligned}$$

Wenn $AB_{s,t,u} = I_4$, dann folgt, $81 - 4t = 1$, $65 + s - 4t = 0$ und $-120 + 4u = 0$ und damit $s = 15$, $t = 20$ und $u = 30$. Sei $B = B_{15,20,30}$. Dann

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 47 & -58 & 34 \\ -5 & -16 & 20 & -12 \\ -10 & -30 & 37 & -21 \\ 7 & 21 & -26 & 15 \end{pmatrix}$$

Man überprüft leicht, dass

$$AB = BA = I_4.$$

Es folgt, dass $B$ genau dann die Inversematrix von $A$ ist, wenn $s = 15$, $t = 20$ und $u = 30$.