Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

5. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 5.1

(a) Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $U = \operatorname{span}\{(1, 2, 3)\}$. Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $V = U \oplus W$.

(b) Betrachten Sie $V := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 3\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $U := \operatorname{span}\{x^2 + 1, x^2 + x + 1\} \subseteq V$. Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $V = U \oplus W$.

(c) Betrachten Sie $V := \operatorname{span}\{\cos(t), \sin(t), \frac{1}{t}, \log(t)\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist. Sei

$$U := \operatorname{span}\{\cos(t) + \frac{1}{t}, \sin(t) + \log(t)\}.$$

Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $V = U \oplus W$.

(d) Seien V und U wie in (c) und $W' := \operatorname{span}\{\cos(t) + \sin(t) + \frac{1}{t}, -7\sin(t)\}$. Gilt $V = U \oplus W'$? (Begründen Sie ihre Antwort).

Hausaufgabe 5.2 Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K von Dimension $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (Beweisen Sie Ihre Antwort)

(a) Sind $U, W \subseteq V$ Unterräume mit $\dim(U) + \dim(W) > n$, so gilt $U \cap W \neq \{0\}$.

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von Dimension 2 und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $V = U \oplus W$. Dann gilt $|W| = 27$.

(c) Ist $B := \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V \setminus \{0\}$ mit $m > n$, dann enthält B eine Basis von V.

Hausaufgabe 5.3 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$U^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(b) Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^n$ und

$$U := \operatorname{span}\{e_1 + \cdots + e_n\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.

(c) Sei $\{0\} \neq W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein weiterer Unterraum. Nehmen Sie an, dass eine Basis $w_1, \ldots, w_k$ von W existiert mit

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ gilt.

(Hinweis: später in der Vorlesung wird gezeigt werden, dass für jeden Unterraum $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine derartige Basis existiert.)

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den, 26.05.2024, 23.59 Uhr in Panda.