Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

# Lineare Algebra für Informatiker

## 5. Hausaufgabenblatt - Lösungen

**Hausaufgabe 5.1**

(a) Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $U = \operatorname{span}\{(1,2,3)\}$. Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $V = U \oplus W$.

(b) Betrachten Sie $V := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 3\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $U := \operatorname{span}\{x^2+1, x^2+x+1\} \subseteq V$. Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $V = U \oplus W$.

(c) Betrachten Sie $V := \operatorname{span}\{\cos(t), \sin(t), \frac{1}{t}, \log(t)\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist. Sei

$$U := \operatorname{span}\{\cos(t) + \frac{1}{t}, \sin(t) + \log(t)\}.$$

Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $V = U \oplus W$.

(d) Seien $V$ und $U$ wie in (c) und $W' := \operatorname{span}\{\cos(t) + \sin(t) + \frac{1}{t}, -7\sin(t)\}$. Gilt $V = U \oplus W'$? (Begründen Sie ihre Antwort).

*Lösung:* Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von $V$. Sei $\{v_1, \dots v_m\}$ eine Basis von $U$. Ergänze $\{v_1, \dots v_m\}$ zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $V$. Dann ist $W := \operatorname{span}(\{v_{m+1}, \dots, v_n\})$ ein Unterraum, sodass

$$U + W = \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_m\}) + \operatorname{span}(\{v_{m+1}, \dots, v_n\}) = \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = V$$

und

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{v \in V : \text{es gibt } c_1, \dots, c_n \in K, \text{ sodass } v = \sum_{j=1}^{m} c_j v_j \text{ und } v = \sum_{j=m+1}^{n} c_j v_j\} \\ &= \{O\}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass die Koeffizienten in einer Linearkombination von Basisvektoren eindeutig sind. Es folgt, dass $V = U \oplus W$.

(a) Seien $e_1 = (1,0,0)$ und $e_2 = (0,1,0)$. Die Vektoren $e_1$, $e_2$ und $(1,2,3)$ sind linear unabhängig, denn aus $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3(1,2,3) = O$ folgt $c_1 + c_3 = 0$, $c_2 + 2c_3 = 0$ und $3c_3 = 0$ und damit $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Weil $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$, folgt, dass $\{e_1, e_2, (1,2,3)\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ ist. Sei $W = \operatorname{span}(\{e_1, e_2\})$. Dann gilt $V = U \oplus W$.

(b) Da $\{1, x, x^2, x^3\}$ eine Basis von $V$ ist, gilt $\dim(V) = 4$. Wenn $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ und

$$c_1(x^2+x+1) + c_2(x^2+1) + c_3 \cdot 1 + c_4x^3 = c_4x^3 + (c_1+c_2)x^2 + c_1x + (c_1+c_2+c_3)$$

das Nullpolynom ist, dann gilt $c_4 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Es folgt $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Dies zeigt, dass die Polynome $x^2+x+1$, $x^2+1$), 1 und $x^3$ linear unabhängig sind. Darum ist $\{x^2+x+1, x^2+1, 1, x^3\}$ eine Basis ist. Wenn $W = \mathrm{span}(\{1, x^3\})$, dann folgt $V = U \oplus W$.

(c) Seien $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, sodass $t \mapsto c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \frac{1}{t} + c_4 \log(t)$ die Nullfunktion auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} c_3 &= \lim_{t \downarrow 0} c_1 t \cos(t) + c_2 t \sin(t) + c_3 t \frac{1}{t} + c_4 t \log(t) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} t \Big( c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \frac{1}{t} + c_4 \log(t) \Big) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt ist $t \mapsto c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_4 \log(t)$ die Nullfunktion und darum

$$\begin{aligned} c_4 &= \lim_{t \downarrow 0} c_1 \frac{1}{\log(t)} \cos(t) + c_2 \frac{1}{\log(t)} \sin(t) + c_4 \frac{1}{\log(t)} \log(t) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\log(t)} \Big( c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_4 \log(t) \Big) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $t \mapsto c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ die Nullfunktion ist. Es gilt

$$c_1 = c_1 \cos(\pi/2) + c_2 \sin(\pi/2) = 0$$

und

$$c_2 = c_1 \cos(2\pi) + c_2 \sin(2\pi) = 0.$$

Darum gilt $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ und es folgt, dass cos, sin, $t \mapsto \frac{1}{t}$ und log linear unabhängig sind. Darum ist $\{\cos, \sin, t \mapsto \frac{1}{t}, \log\}$ eine Basis von $V$. Insbesondere gilt $\dim(V) = 4$.

Seien $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ und nehme an, dass

$$t \mapsto c_1 \big( \cos(t) + \frac{1}{t} \big) + c_2 \big( \sin(t) + \log(t) \big) + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t)$$

die Nullfunktion ist. Weil cos, sin, $t \mapsto \frac{1}{t}$ und log linear unabängig sind folgt $c_1 + c_3 = 0$, $c_2 + c_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ und damit $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Es folgt, dass $\{t \mapsto \cos(t) + \frac{1}{t}, t \mapsto \sin(t) + \log(t), \cos, \sin\}$ eine Basis von $V$ ist. Sei $W = \mathrm{span}(\{\cos, \sin\})$. Dann gilt $V = U \oplus W$.

(d) Es gilt

$$\big( \cos(t) + \sin(t) + \frac{1}{t} \big) + \frac{1}{7} \big( -7 \sin(t) \big) = \cos(t) + \frac{1}{t} \in U \cap W'$$

Da $t \mapsto \cos(t) + \frac{1}{t}$ nich die Nullfunktion ist, folgt $U \cap W' \neq \{0\}$ und darum ist $V$ nicht die direkte Summe von $U$ und $W'$.

**Hausaufgabe 5.2** Sei $K$ ein Körper und $V$ ein Vektorraum über $K$ von Dimension $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (Beweisen Sie Ihre Antwort)

(a) Sind $U, W \subseteq V$ Unterräume mit $\dim(U) + \dim(W) > n$, so gilt $U \cap W \neq \{0\}$.
*Lösung:* Wahr. Seien $k = \dim(U)$ und $l = \dim(W)$ und sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von $U$ und $\{w_1, \ldots, w_l\}$ eine Basis von $W$. Weil $k + l > n =$

$\dim(V)$ sind die Vektoren $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l$ linear abhängig. Es gibt darum $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l \in K$ sodass

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{j=1}^{l} d_j w_j = O$$

und $c_i \neq 0$ für ein $i$ oder $d_j \neq 0$ für ein $j$. Wenn $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = O$ wäre, dann wäre $\sum_{j=1}^{l} d_j w_j$ gleich $O$. Weil $\{u_1, \ldots, u_k\}$ und $\{w_1, \ldots, w_l\}$ Basen von $U$ bzw. $W$ sind, würde folgen, dass $c_1 = \cdots = c_k = d_1 = \cdots = d_l = 0$. Darum gilt $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i \neq O$. Weil $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i \in U$ und $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = -\sum_{j=1}^{l} d_j w_j \in W$, folgt, dass $\sum_{j=1}^{l} d_j w_j \in (U \cap W) \setminus \{O\}$.

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von Dimension 2 und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $V = U \oplus W$. Dann gilt $|W| = 27$.
*Lösung:* Wahr. Weil $V = U \oplus W$ gilt $\dim(W) = \dim(V) - \dim(U) = 5 - 2 = 3$. Sei $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von $W$. Dann ist die Abbildung

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \to W, \quad (c_1, c_2, c_3) \mapsto c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$$

eine Bijektion. Darum gilt

$$|W| = |(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3| = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}|^3 = 3^3 = 27.$$

(c) Ist $B := \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V \setminus \{0\}$ mit $m > n$, dann enthält $B$ eine Basis von $V$.
*Lösung:* Wahr wenn $n = 0$ oder $n = 1$, sonst falsch. Wenn $n = 0$, dann ist die leere Menge eine Basis von $V$. Wenn $n = 1$, dann besitzt jede Basis von $V$ genau ein Element. Für jedes $v \in V \setminus \{O\}$ ist die Menge $\{v\}$ eine Basis von $V$. Wenn $n \geq 2$, dann besitzt jede Basis von $V$ mindestens 2 linear unabhängige Vektoren. Sei $v \in V \setminus \{O\}$. Die Vektoren $v$ und $\lambda v$ sind für alle $\lambda \in K$ linear abhängig. Sei $B = \{jv : j \in \mathbb{N}, j \leq m\}$. Dann ist $A \subseteq B$ genau dann eine Teilmenge von linear unabhängige Vektoren, wenn $|A| \leq 1$. $B$ enthält darum keine Basis.

**Hausaufgabe 5.3** Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$U^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $U \cap U^\perp = \{0\}$.
*Lösung:* Für alle $u \in U$ gilt $\langle O, u \rangle = 0$ und darum $O \in U^\perp$. Wenn $x, y \in U^\perp$, dann gilt für alle $u \in U$, dass

$$\langle x + y, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle = 0 + 0 = 0$$

und darum $x + y \in U^\perp$. Wenn $x \in U^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $u \in U$, dass

$$\langle \lambda x, u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

und darum $\lambda x \in U^\perp$. Dies beweist, dass $U^\perp$ ein Unterraum ist. Wenn $u \in U \cap U^\perp$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2 = \langle u, u\rangle = 0.$$

Es folgt $u = O$. Darum gilt $U \cap U^\perp = \{O\}$.

(b) Seien $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^n$ und

$$U := \operatorname{span}\{e_1 + \cdots + e_n\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.
*Lösung:* Für $1 \leq i < n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle e_i - e_{i+1}, \lambda(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)\rangle = \lambda - \lambda = 0$$

und darum $e_i - e_{i+1} \in U^\perp$. Seien $c, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ und nehme an, dass $c(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(e_j - e_{j+1}) = O$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 =& \Big\langle c(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(e_j - e_{j+1}), e_1 + e_2 + \cdots + e_n \Big\rangle \\
&= \Big\langle c(e_1 + e_2 + \cdots + e_n), e_1 + e_2 + \cdots + e_n \Big\rangle + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \Big\langle (e_j - e_{j+1}), e_1 + e_2 + \cdots + e_n \Big\rangle \\
&= c\Big\langle e_1 + e_2 + \cdots + e_n, e_1 + e_2 + \cdots + e_n \Big\rangle = nc
\end{aligned}$$

und darum $c = 0$. Weiter gilt

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j(e_j - e_{j+1}) = c_1 e_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (c_j - c_{j-1}) e_j - c_{n-1} e_n.$$

Weil $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, folgt $c_1 = 0$, $c_2 - c_1 = 0$, $c_3 - c_2 = 0$, $\ldots$, $c_{n-1} - c_{n-2} = 0$, und $-c_{n-1} = 0$. Die erste Gleichung impliziert $c_1 = 0$. Die zweite Gleichung impliziert dann $c_2 = 0$. Die dritte Gleichung impliziert dann $c_3 = 0$ und so weiter. Es folgt $c = c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Darum sind $e_1 + \cdots + e_n, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n$ linear unabhängig und ist $\{e_1 + \cdots + e_n, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

Weil $e_1 + \cdots + e_n \notin U^\perp$ gilt $U^\perp \neq V$ und darum $\dim(U^\perp) \leq n - 1$. Da $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Teilmenge von linear unabhängige Elemente in $U^\perp$ ist, folgt, dass $\dim(U^\perp) = n - 1$. Insbesondere ist $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Basis von $U^\perp$.

Da $\{e_1 + \cdots + e_n, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
U + U^\perp &= \operatorname{span}(e_1 + \cdots + e_n\}) + \operatorname{span}(\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}) \\
&= \operatorname{span}(e_1 + \cdots + e_n\}, \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}) = \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Nach (a) gilt $U \cap U^\perp = \{O\}$. Es folgt, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.

(c) Sei $\{0\} \neq W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein weiterer Unterraum. Nehmen Sie an, dass eine Basis $w_1, \ldots, w_k$ von $W$ existiert mit

$$\langle w_i, w_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ gilt.
*Lösung:* Nach (a) gilt $W \cap W^\perp = \{O\}$. Es ist darum zu zeigen, dass $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j \in \operatorname{span}(\{w_1, \ldots, w_k\}) = W.$$

Für alle $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\Big\langle v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j, \sum_{i=1}^{k} c_i w_i \Big\rangle &= \sum_{i=1}^{k} c_i \Big\langle v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j, w_i \Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i \Big( \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle \langle w_j, w_i \rangle \Big) = \sum_{i=1}^{k} c_i \Big( \langle v, w_i \rangle - \langle v, w_i \rangle \Big) = 0.\end{aligned}$$

Darum gilt $v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j \in W^\perp$. Es folgt, dass

$$v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j + \Big( v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j \Big) \in W + W^\perp.$$

Weil dies gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$, folgt $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$.