Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Drücken Sie folgende Mengen in Mengenschreibweise aus.

(a) Alle geraden ganzen Zahlen.

(b) Alle reellen Zahlen strikt größer als -1 und kleiner gleich π.

(c) Alle irrationalen Zahlen.

Präsenzaufgabe 1.2 Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

Präsenzaufgabe 1.3 Nehme an, dass $a \neq b$. Welche der Mengen

$$\{a, b\}, \quad \{a\}, \quad \{a, b, a\}, \quad \{b, a\}, \quad \{a, a\}$$

sind gleich?

Präsenzaufgabe 1.4 Sei X eine Menge. Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$, definieren wir ihr Komplement in X durch

$$X \setminus Y := Y^c := \{x \in X : x \notin Y\}.$$

Für $A, B \subseteq X$ zeigen Sie

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Präsenzaufgabe 1.5 Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definieren Sie die symmetrische Differenz

$$A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ das Distributivgesetz

$$(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C).$$

Präsenzaufgabe 1.6 Negieren Sie die folgenden Aussagen in Worten.

(a) Es gibt ein Auto, das nicht schwarz ist.

(b) Julia hat die Studienleistung erbracht und die Klausur bestanden.

(c) Christian hat seinen Regenschirm vergessen oder geht zu Fuß.

Präsenzaufgabe 1.7 Seien P, Q, R Aussagen. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen Tautologien sind.

(a) $P \to P$

(b) $P \to (Q \to P)$

(c) $\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \to (P \to R)$

Präsenzaufgabe 1.8 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Hausaufgabe 1.1 Sei X eine Menge und seien $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie:

(a) $A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hausaufgabe 1.2 Sei $\alpha \neq 1$. Bestimmen Sie die Potenzmenge folgender Mengen:

(a) $\emptyset$,

(b) $\{1, \alpha\}$,

(c) $\{1, \{1\}, \{1, 1\}\}$.

Hausaufgabe 1.3 Schreiben Sie die folgende Aussage mithilfe von Quantoren:
Für jedes Paar a und b rationaler Zahlen mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl r, sodass $a < r < b$.

Hausaufgabe 1.4 Seien P, Q, R Aussagen. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen Tautologien sind.

(a) $\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big)$

(b) $\big((P \to Q) \to P\big) \to P$

(c) $\big((P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R)\big) \to R$

Hausaufgabe 1.5 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 25.10.2024 in Panda.