Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

1. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 1.1 Sei X eine Menge und seien $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie:

(a) $A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$
Wir geben zwei Beweisen.
1. Beweis: Gilt $B = C$, so folgt offensichtlich $A\Delta B = A\Delta C$.

Wir zeigen nun die Aussage

$$B \neq C \Rightarrow A\Delta B \neq A\Delta C,$$

welche äquivalent zur Aussage

$$A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$$

ist.

Sei also $B \neq C$. Dann muss gelten $B \setminus C \neq \emptyset$ oder $C \setminus B \neq \emptyset$. Wir können annehmen, dass $B \setminus C \neq \emptyset$ gilt, da wir sonst einfach die Rollen von B und C vertauschen können. Sei also $b \in B$ mit $b \notin C$. Dann gibt es zwei Fälle:

1.Fall $b \in A$: Dann gilt $b \in A \cap B$, also auch

$$b \notin A\Delta B.$$

Aufgrund von $b \in A$ und $b \notin C$ folgt aber $b \in A \cup C$ und $b \notin A \cap C$ (da $A \cap C \subseteq C$ gilt) und demnach

$$b \in A\Delta C.$$

Also gilt im 1. Fall $A\Delta B \neq A\Delta C$.

2.Fall $b \notin A$: Aufgrund von $b \notin A \cup C$ folgt

$$b \notin A\Delta C.$$

Wegen $b \in B$ folgt $b \in A \cup B$ und aufgrund von $b \notin A$ auch $b \notin A \cap B$ (da $A \cap B \subseteq A$ gilt). Insgesamt folgt also

$$b \in A\Delta B$$

also gilt im 2. Fall ebenfalls $A\Delta B \neq A\Delta C$.

2.Beweis: (Dieses Beweis benützt Teilaufgabe (f)) Gilt $B = C$, so folgt offensichtlich $A\Delta B = A\Delta C$. Es gelte nun $A\Delta B = A\Delta C$. Schneiden beider Seiten dieser Gleichung mit A liefert nach nach Präsenzaufgabe 1.5 die Gleichung $A\Delta(A \cap B) = A\Delta(A \cap C)$ was äquivalent zu $A \setminus B = A \setminus C$ bzw. zu $B \cap A = C \cap A$ ist. Schneiden der Gleichung mit A^c anstatt von A liefert $\emptyset\Delta(B \cap A^c) = \emptyset\Delta(C \cap A^c)$ was äquivalent zu $B \cap A^c = C \cap A^c$ ist. Wir folgern mit Hilfe von f, dass

$$B = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = (C \cap A) \cup (C \cap A^c) = C \cap (A \cup A^c) = C.$$

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
Beweis:

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) &\iff x \in A \wedge x \notin B \setminus C \\
&\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \setminus C) \\
&\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \\
&\iff x \in A \wedge \big(\neg(x \in B) \vee \neg(x \notin C)\big) \\
&\iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\iff x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Beweis: Sei $x \in (A \cap B)^c$. Dann $x \notin A \cap B$. Es folgt, dass $x \notin A$ oder $x \notin B$ und damit $x \in A^c$ oder $x \in B^c$. Dies zeigt, dass $x \in A^c \cup B^c$. Wir haben jetzt bewiesen, dass $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.
Sei jetzt $x \in A^c \cup B^c$. Dann $x \in A^c$ oder $x \in B^c$ und damit $x \notin A$ oder $x \notin B$. Es folgt, dass die Aussage "$x \in A$ und $x \in B$" falsch ist. Es folgt $x \notin A \cap B$ und darum $x \in (A \cap B)^c$. Dies beweist, dass $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Beweis: Sei $x \in (A \cap B) \cap C$. Es gilt $(x \in A \cap B) \wedge (x \in C)$ und damit $(x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)$. Es folgt, dass $(x \in A) \wedge (x \in B \cap C)$ und darum $x \in A \cap (B \cap C)$. Dies beweist, dass $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$. Die andere Inklusion beweist man ähnlich.

(e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Beweis: Sei $x \in (A \cup B) \cup C$. Es gilt $(x \in A \cap B) \vee (x \in C)$ und damit $(x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)$. Es folgt, dass $(x \in A) \vee (x \in B \cup C)$ und darum $x \in A \cup (B \cup C)$. Dies beweist, dass $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$. Die andere Inklusion beweist man ähnlich.

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Beweis: Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Es gilt $(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$ und damit $(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)$. Es folgt, dass $(x \in A \wedge x \in B)$ oder $(x \in A \wedge x \in C)$. Dies beweist, dass $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Sei jetzt $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Es gilt $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. In beiden Fällen gilt $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Dies beweist, dass $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Hausaufgabe 1.3 Schreiben Sie die folgende Aussage mithilfe von Quantoren: Für jedes Paar a und b rationaler Zahlen mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl r, sodass $a < r < b$.
Lösung: $\forall (a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x < y\} \, \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Hausaufgabe 1.4 Seien P, Q, R Aussagen. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen Tautologien sind.

(a) $\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big)$
Beweis: Wenn $\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big)$ falsch ist, dann ist $Q \to (P \to R)$ wahr und $P \to (Q \to R)$ falsch. Da $P \to (Q \to R)$ falsch ist, ist P wahr und $Q \to R$ falsch. Weil $Q \to R$ falsch ist, ist Q wahr und R falsch. Wenn P und Q wahr sind und R falsch ist, dann ist $Q \to (P \to R)$ falsch. Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass $Q \to (P \to R)$ wahr ist. Es folgt,

dass $\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big)$ für alle Aussagen P, Q und R wahr ist.

(b) $\big((P \to Q) \to P\big) \to P$
Beweis:

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \to P$	$\big((P \to Q) \to P\big) \to P$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

Hausaufgabe 1.5 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

Lösung: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Falls für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 ,$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 .$$