Universität Paderborn Wintersemester 2024–2025
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Lineare Algebra 1

1. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 1.4 Sei X eine Menge. Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$, definieren wir ihr Komplement in X durch

$$X \setminus Y := Y^c := \{x \in X : x \notin Y\}.$$

Für $A, B \subseteq X$ zeigen Sie

(a) $(A^c)^c = A$
Beweis: Wenn $x \in (A^c)^c$, dann $x \notin A^c$. Damit ist die Aussage "$x \notin A$" falsch. Es folgt, dass $x \in A$. Dies beweist, dass $(A^c)^c \subseteq A$. Wenn $x \in A$, dann is die Aussage "$x \in A^c$" falsch und darum $x \in (A^c)^c$. Dies beweist, dass $A \subseteq (A^c)^c$.

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Beweis: Wenn $x \in (A \cup B)^c$, dann $x \notin A \cup B$. Die Aussage "$x \in A$ oder $x \in B$" ist damit falsch. Es folgt, dass $x \notin A$ und $x \notin B$. Darum $x \in A^c$ und $x \in B^c$ und damit $x \in A^c \cap B^c$. Dies zeigt, dass $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Wenn $x \in A^c \cap B^c$, dann $x \in A^c$ und $x \in B^c$. Es folgt, dass $x \notin A$ und $x \notin B$. Damit is die Assage "$x \in A \cup B$" falsch. Es folgt, dass $x \in (A \cup B)^c$. Dies beweist, dass $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

Präsenzaufgabe 1.5 Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definieren Sie die symmetrische Differenz

$$A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ das Distributivgesetz

$$(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C).$$

Beweis: Sei $x \in (A \oplus B) \cap C$. Dann ist $x \in C$ und $x \in A \oplus B$. Weiter ist (nach Definition von $A \oplus B$) $x \in A$ oder $x \in B$, nicht aber im Durchschnitt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $x \in A$. Dann ist aber $x \notin B$, also $x \in A \cap C$ und $x \notin B \cap C$. Dies beweist, dass $(A \oplus B) \cap C \subseteq (A \cap C) \oplus (B \cap C)$.
Sei nun $x \in (A \cap C) \oplus (B \cap C)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $x \in A \cap C$. Dann $x \notin B \cap C$ und damit auch $x \notin B$. Es folgt, dass $x \in (A \setminus B) \cap C \subseteq (A \oplus B) \cap C$. Dies beweist, dass $(A \cap C) \oplus (B \cap C) \subseteq (A \oplus B) \cap C$.

Präsenzaufgabe 1.7 Seien P, Q, R Aussagen. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen Tautologien sind.

(b) $P \to (Q \to P)$
Lösung: Wenn P falsch ist, dann ist $P \to R$ für jede Aussauge R wahr. Wenn P wahr ist, dann ist $Q \to P$ für jede Aussauge Q wahr. Es folgt, dass $P \to (Q \to P$ für alle Aussagen P und Q wahr ist.

(c) $\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \to (P \to R)$
Lösung: Nehme an, dass $\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \to (P \to R)$ nicht wahr ist. Dann ist $(P \to Q) \wedge (Q \to R)$ wahr und $P \to R$ falsch. Weil $P \to R$ falsch ist, ist P wahr und R falsch. Weil P und $P \to Q$ beide wahr sind, ist auch Q wahr. Weil Q und $Q \to R$ beide wahr sind, ist auch R wahr. Da R sowohl wahr als auch falsch ist, sind wir bei einem Widerspruch angelangt. Es folgt, dass $\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \to (P \to R)$ für alle Aussagen P, Q und R wahr ist.

Präsenzaufgabe 1.8 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lösung: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Falls für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$