Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Gegeben seien die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{\alpha, a, A\}$. Bestimmen Sie

(a) eine injektive Abbildung $f : N \to M$,

(b) eine surjektive Abbildung $g : M \to N$,

(c) eine bijektive Abbildung $h : N \to N$,

(d) eine Abbildung $i : M \to M$, die weder injektiv noch surjektiv ist.

Präsenzaufgabe 2.2 Sei X eine endliche Menge und sei $f : X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) f ist injektiv.

(b) f ist surjektiv.

(c) f ist bijektiv.

Präsenzaufgabe 2.3 Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(ii) Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$.

(iii) Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt $f_1 = f_2$.

Präsenzaufgabe 2.4 Welche der folgenden Verknüpfungen sind kommutativ/assoziativ?

(a) $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y$,

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$,

(c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3 + xy$.

Präsenzaufgabe 2.5 Sei X eine Menge. Die Bildung von Vereinigungen und Komplementen sind Verknüpfungen

$$\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \cup B$$
$$\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \setminus B$$

auf der Potenzmenge. Sind diese Verknüpfungen kommutativ oder assoziativ?

Präsenzaufgabe 2.6 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Mit leichtem Missbrauch der Notation schreiben wir f auch für die Abbildung

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ für alle $x \in X$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt.

(c) Geben Sie ein Beispiel für Mengen X und Y, eine Abbildung $f : X \to Y$ und Teilmengen $A, B \subseteq X$, so dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ und $Y \setminus f(A) \neq f(X \setminus A)$.

(d) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt.

Hausaufgabe 2.1 Seien X und Y endliche Mengen. Beweisen Sie, dass es genau dann eine Bijektion $X \to Y$ gibt, wenn X und Y gleich viele Elemente haben.

Hausaufgabe 2.2 Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Hausaufgabe 2.3 Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;

(ii) Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;

(iii) Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.

Hausaufgabe 2.4 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wenn $A \subseteq Y$, dann schreiben wir $f^{-1}(A)$ für das Urbild von A unter f, d.h.

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(Y)$ gilt.

Hausaufgabe 2.5 Seien X und Y Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Hausaufgabe 2.6 Sei X eine beliebige Menge. Beweisen Sie den Satz von Cantor: Es gibt keine surjektive Abbildungen $f : X \to \mathcal{P}(X)$.
Hinweis: Betrachten Sie die Menge $Y := \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 1.11.2024 in Panda.