Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

2. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 2.2 Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
Lösung: Wir definieren

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \end{cases}$$

Dann ist f injektiv auf $2\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N}_0+1$ und es gilt $f(2\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ und $f(2\mathbb{N}_0+1) = -\mathbb{N}_0$. Damit folgt, dass f injektiv auf ganz $\mathbb{N}$ und surjektiv, also auch bijektiv ist. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}, \quad m \mapsto \begin{cases} 2m & \text{falls } m \in \mathbb{N} \\ -2m+1 & \text{falls } m \in -\mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Hausaufgabe 2.3 Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;
Beweis: Nehmen Sie an, dass $g \circ f$ surjektiv ist. Sei $z \in Z$. Weil $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$, so dass $(g \circ f)(x) = z$. Sei $y := f(x) \in Y$. Dann gilt $g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = z$. Es folgt, dass g surjektiv ist.

(ii) Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;
Beweis: Nehmen Sie an, dass f und g beide surjektiv sind. Sei $z \in Z$. Weil g surjektiv ist, gibt es ein $y \in Y$, sodass $g(y) = z$. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$. Es gilt $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z$. Es folgt, dass $g \circ f$ surjektiv ist.

(iii) Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt, dass $g_1 = g_2$.
Beweis: Nehmen Sie an, dass f surjektiv ist. Seien $g_1, g_2 : Y \to Z$ Abbildungen, sodass $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Sei $y \in Y$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$. Es folgt,

$$g_1(y) = g_1\big(f(x)\big) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2\big(f(x)\big) = g_2(y).$$

Es folgt, dass $g_1 = g_2$.
Nehmen Sie jetzt an, dass für alle Mengen Z und Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt, dass $g_1 = g_2$. Sei $y \in Y$. Wir definieren

$$g_1 : Y \to \{0,1\}, \quad v \mapsto \begin{cases} 0 & (v \neq y) \\ 1 & (v = y) \end{cases}$$
$$g_2 : Y \to \{0,1\}, \quad v \mapsto 0$$

Da $g_1 \neq g_2$, folgt $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$. Weil $(g_1 \circ f)(x) = g_1\big(f(x)\big) = g_2\big(f(x)\big) = (g_2 \circ f)(x)$ für alle $x \in X$ mit $f(x) \neq y$, folgt, dass es ein $x \in X$, gibt, sodass $f(x) = y$. Dies zeigt, dass f surjektiv ist.

Hausaufgabe 2.4 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wenn $A \subseteq Y$, dann schreiben wir $f^{-1}(A)$ für das Urbild von A unter f, d.h.

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ gilt.
Beweis: Sei $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Dann gilt $f(x) \in A \cup B$ und damit $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$. Wenn $f(x) \in A$, dann gilt $x \in f^{-1}(A)$. Wenn $f(x) \in B$, dann gilt $x \in f^{-1}(B)$. Es folgt, dass $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dies zeigt, dass $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Sei jetzt $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ oder $x \in f^{-1}(B)$. Wenn $x \in f^{-1}(A)$, dann $f(x) \in A \subseteq A \cup B$. Wenn $x \in f^{-1}(B)$, dann $f(x) \in B \subseteq A \cup B$. In beide Fälle gilt $f(x) \in A \cup B$ und damit $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Dies zeigt, dass $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B)$.

(b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ gilt.
Beweis: Sei $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Dann gilt $f(x) \in A \cap B$ und damit $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$. Es folgt, dass $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$ und darum $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Dies zeigt, dass $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Sei jetzt $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$. Es folgt, dass $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$ und damit $f(x) \in A \cap B$. Dies zeigt, dass $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Wir haben jetzt bewiesen, dass $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$.

(c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(Y)$ gilt.
Beweis: Sei $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. Dann $f(x) \in Y \setminus A$. Es folgt, dass $f(x) \notin A$, und damit $x \notin f^{-1}(A)$. Die zeigt, dass $x \in X \setminus f^{-1}(A)$. Wir haben jetzt bewiesen, das $f^{-1}(Y \setminus A) \subseteq X \setminus f^{-1}(A)$. Sei jetzt $x \in X \setminus f^{-1}(A)$. Dann gilt $x \notin f^{-1}(A)$ und damit $f(x) \notin A$. Da $f(x) \in Y \setminus A$, folgt $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. Dies beweist, dass $X \setminus f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(Y \setminus A)$.

Hausaufgabe 2.5 Seien X und Y Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
Beweis: Wenn f surjektiv ist, dann $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$. Daher können wir für jedes $y \in Y$ ein $x_y \in f^{-1}(\{y\})$ wählen. Sei jetzt

$$g : Y \to X, \quad y \mapsto x_y.$$

Dann gilt für jedes $y \in Y$

$$(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_Y(y).$$

Es folgt, dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Nehmen Sie jetzt an, dass es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Sei $y \in Y$. Für $x := g(y)$ gilt

$$f(x) = f\big(g(y)\big) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y.$$

Es folgt, dass f surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
Beweis: Wenn f bijektiv ist, dann gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x_y \in X$, sodass $f(x_y) = y$. Bemerke, dass $x_{f(x)} = x$ für alle $x \in X$. Sei

$$g : Y \to X, \quad y \mapsto x_y.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f\big(g(y)\big) = f(x_y) = y \qquad (y \in Y),\\ (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) = x_{f(x)} = x \qquad (x \in X)\end{aligned}$$

und darum $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
Nehmen Sie jetzt an, dass es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Nach (a) ist f surjektiv. Wir zeigen, dass f auch injektiv ist. Seien $x_1, x_2 \in X$, sodass $f(x_1) = f(x_2)$. Es gilt

$$x_1 = \mathrm{id}_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = (g \circ f)(x_2) = \mathrm{id}_X(x_2) = x_2.$$

Dies zeigt, dass f inektiv ist.

Hausaufgabe 2.6 Sei X eine beliebige Menge. Beweisen Sie den Satz von Cantor: Es gibt keine surjektive Abbildungen $f : X \to \mathcal{P}(X)$.
Beweis: Wir streben einen Widerspruch an und nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ gibt. Sei $Y := \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$, sodass $f(x) = Y$. Wenn $x \in Y$, dann $x \notin f(x) = Y$. Wenn $x \notin Y$, dann $x \notin f(x)$ und darum $x \in Y$. In beide Fällen erhalten wir einen Widerspruch. Es folgt, dass es keine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ geben kann.