Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

2. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 2.2 Sei X eine endliche Menge und sei $f : X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) f ist injektiv.

(b) f ist surjektiv.

(c) f ist bijektiv.

Beweis: Per Definition gilt

$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ injektiv} \wedge f \text{ surjektiv.}$$

Es genügt also die Äquivalenz

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}$$

zu zeigen.

Sei

$$f(X) := \{y \in X : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

das Bild von f. Sei $n = \#X$. Per Definition von Abbildungen gilt $|f(X)| \leq n$. Andererseits if f genau dann injektiv, wenn $|f(X)| \geq n$, da $|X| = n$. Damit ergibt sich also, dass f injektiv ist genau dann wenn $|f(X)| = n$. Die Abbildung f ist surjektiv genau dann wenn $X = f(X)$, was genau dann der Fall ist, wenn $|X| = |f(X)|$ (da X endlich ist). Aber $|X| = n$ womit sich insgesamt ergibt

$$f \text{ ist injektiv} \iff |f(X)| = n = |X| \iff f(X) = X \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Präsenzaufgabe 2.3 Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
Beweis: Wir beweisen die Negation: Sei f nicht injektiv. Dann existieren $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt aber auch $g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$, also ist $g \circ f$ ebenfalls nicht injektiv.

(ii) Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$.
Beweis: Seien $x_1, x_2 \in X$, sodass $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Dann $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Weil g injektiv ist, folgt $f(x_1) = f(x_2)$. Weil f injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$.

(iii) Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt, dass $f_1 = f_2$.
Beweis: Nehmen Sie an, dass g injektiv ist. Seien $f_1, f_2 : X \to Y$ Abbildungen, sodass $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Für alle $x \in X$ gilt

$$g(f_1(x)) = (g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x) = g(f_2(x)).$$

Da g injektiv ist folgt, dass $f_1(x) = f_2(x)$. Dies zeigt, dass $f_1 = f_2$.

Nehmen Sie jetzt an, dass für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt, dass $f_1 = f_2$. Seien $y_1, y_2 \in Y$ und nehme an, dass $g(y_1) = g(y_2)$. Sei $X \neq \emptyset$ and seien f_1 und f_2 die konstante Abbildungen

$$\begin{aligned} f_1 &: X \to Y, \quad x \mapsto y_1, \\ f_2 &: X \to Y, \quad x \mapsto y_2. \end{aligned}$$

Für alle $x \in X$ gilt

$$(g \circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f_2(x)) = (g \circ f_2)(x).$$

Darum $g \circ f_1 = g \circ f_2$ und nach Annahme folgt $f_1 = f_2$. Sei $x \in X$. Dann

$$y_1 = f_1(x) = f_2(x) = y_2.$$

Präsenzaufgabe 2.6 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Mit leichtem Missbrauch der Notation schreiben wir f auch für die Abbildung

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ für alle $x \in X$ gilt.
Beweis: Sei $x \in X$. Es gilt

$$f(\{x\}) = \{f(u) : u \in \{x\}\} = \{f(x)\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt.
Beweis: Seien $A, B \subseteq X$. Wenn $y \in f(A \cup B)$, dann gibt es ein $x \in A \cup B$, sodass $f(x) = y$. Wenn $x \in A$, dann gilt $y = f(x) \in f(A)$. Wenn $x \in B$, dann gilt $y = f(x) \in f(B)$. Es folgt, dass $y \in f(A) \cup f(B)$. Dies beweist, dass $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Nehmen Sie jetzt an, dass $y \in f(A) \cup f(B)$. Wenn $y \in f(A)$, dann gibt es ein $x \in A$, sodass $y = f(x)$. Da $A \subseteq A \cup B$, folgt $y \in f(A \cup B)$. Wenn $y \in f(B)$, dann gibt es ein $x \in B$, sodass $y = f(x)$. Da $B \subseteq A \cup B$, folgt $y \in f(A \cup B)$. Dies beweist, dass $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel für Mengen X und Y, eine Abbildung $f : X \to Y$ und Teilmengen $A, B \subseteq X$, so dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ und $Y \setminus f(A) \neq f(X \setminus A)$.
Lösung: Seien $X = Y = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ und

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto 0$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{0\} = f(A) \cap f(B), \\ &Y \setminus f(A) = \{0, 1\} \setminus \{0\} = \{1\} \neq \{0\} = f(\{1\}) = f(X \setminus A). \end{aligned}$$

(d) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt.
Beweis: Seien $A, B \subseteq X$. Wenn $y \in f(A \cap B)$, dann gibt es ein $x \in A \cap B$, sodass $y = f(x)$. Da $x \in A$, gilt $y \in f(A)$. Da $x \in B$, gilt $y \in f(B)$. Es folgt, dass $y \in f(A) \cap f(B)$. Dies beweist, dass $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Nehmen Sie an, dass f injektiv ist. Sei $y \in f(A) \cap f(B)$. Es gibt ein $x_1 \in A$, sodass $y = f(x_1)$. Weiter gibt es ein $x_2 \in B$, sodass $y = f(x_2)$. Weil f injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$. Weil $x_1 \in A$ und $x_1 = x_2 \in B$, gilt $x_1 \in A \cap B$. Es folgt, dass $y = f(x_1) = f(A \cap B)$. Dies beweist, dass $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

Nehmen Sie jetzt an, dass $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Seien $x_1, x_2 \in X$, sodass $f(x_1) = f(x_2)$. Wir setzen $A = \{x_1\}$ und $B = \{x_2\}$. Dann $\{f(x_1)\} = f(A)$ und $\{f(x_2)\} = f(B)$. Es folgt, dass $f(A \cap B) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$. Dies zeigt, dass $A \cap B \neq \emptyset$ und damit $x_1 = x_2$.