Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Sei $f : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, $x \mapsto x^2 + 1$. Besitzt f Nullstellen?

Präsenzaufgabe 3.2 Sie $(G, \star)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $x, y, z \in G$ und $x \star y = x \star z$, dann gilt $y = z$.

(b) Wenn $x, y \in G$, dann $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

(c) Wenn $x, y \in G$, dann gibt es eindeutige Elemente $w, z \in G$, sodass $w \star x = y$ und $x \star z = y$.

Präsenzaufgabe 3.3 Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in R$.

Präsenzaufgabe 3.4 Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei Sei $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] := \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Für welche m gilt $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] \neq \mathbb{Q}$?

Präsenzaufgabe 3.5 Sei X eine Menge. Die Bildung symmetrischer Differenzen und dass Schneiden von Teilmengen sind Verknüpfungen

$$\oplus : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$\cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \cap B$$

auf der Potenzmenge.

(a) Zeigen Sie, dass $\cap$ kommutativ und assoziativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\oplus$ kommutativ und assoziativ ist.

(c) Bestimmen Sie neutrale Elemente für $\cap$ und $\oplus$.

(d) Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathcal{P}(X)$ ein inverses Element bezüglich $\oplus$ besitzt.

(e) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \oplus, \cap)$ einen Ring bildet.

Präsenzaufgabe 3.6 Seien $(S, \oplus, \star)$ ein Ring und X eine nichtleere Menge. Sei $R = \{f : X \to S\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach S. Wir definieren auf R eine Addition und Multiplikation durch

$$(f + g)(x) := f(x) \oplus g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \star g(x) \qquad (f, g \in R, x \in X).$$

Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist.

Hausaufgabe 3.1 Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass G abelsch ist, falls $x^2 = e$ für alle $x \in G$ gilt. Geben Sie drei Beispiele für Gruppen mit der Eigenschaft, dass $x^2 = e$ für alle $x \in G$.

Hausaufgabe 3.2 Sei X eine Menge und $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{F}_2$. Für $A \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir

$$\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{F}_2, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

Sei

$$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2), \quad A \mapsto \mathbf{1}_A$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ ein Isomorphismus von Ringen ist.

(b) Nehmen Sie an, dass X eine endliche Menge ist. Beweisen Sie, dass es genau $2^{|X|}$ Abbildungen von X nach $\{0, 1\}$ gibt.

(c) Folgern Sie, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Hausaufgabe 3.3 Sie X eine Menge. Sei $m : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{F}_2$ einen Ringhomomorphismus und sei $U = m^{-1}(\{1\})$. Beweisen Sie folgenden Aussagen.

(a) $X \in U$ und $\emptyset \notin U$.

(b) Für alle $A, B \in U$ gilt $m(A \cap B) = 1$.

(c) Für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ gilt $A \in U$ oder $X \setminus A \in U$.

(d) Wenn $A, B \in \mathcal{P}(X)$ und $A \subseteq B$, dann $m(A)m(B \setminus A) = 0$. Wenn zusätzlich $A \in U$, dann $B \setminus A \notin U$.

(e) Wenn $A \in U$, $B \in \mathcal{P}(X)$ und $A \subseteq B$, dann $B \in U$.

Hausaufgabe 3.4 Sei p eine Primzahl.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ genau ein $r \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ gibt, sodass $n - r$ durch p teilbar ist.

Sei $x \in \mathbb{Z}$ und nehmen Sie an, dass x nicht durch p teilbar ist.

(b) Seien $k, l \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ mit $k \neq l$. Zeigen Sie, dass $kx - lx$ nicht durch p teilbar ist.

Seien $X := \{x, 2x, 3x, \dots, (p-1)x\}$ und $Y := \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Sei weiter $\rho : X \to Y$ die Abbildung, sodass $n - \rho(n)$ für alle $n \in X$ durch p teilbar ist. (Diese Abbildung existiert nach Teilaufgabe (a).)

(c) Zeigen Sie, dass ρ bijektiv ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\left(\prod_{n \in X} n\right) - \left(\prod_{m \in Y} m\right)$ durch p teilbar ist.

(e) Folgern Sie, dass $(p-1)!x^{p-1} - (p-1)!$ durch p teilbar ist.

(f) Beweisen Sie den kleinen Satz von Fermat:

Sei p eine Primzahl. Wenn $x \in \mathbb{Z}$ nicht durch p teilbar ist, dann ist $x^{p-1} - 1$ durch p teilbar.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 8.11.2024 in Panda.