Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

3. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 3.3 Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in R$.
Beweis: Sei $x \in R$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + \big(x + (-x)\big) = (0 \cdot x + x) + (-x) = (0 \cdot x + 1 \cdot x) + (-x) \\ &= (0 + 1) \cdot x + (-x) = 1 \cdot x + (-x) = x + (-x) = 0. \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3.5 Sei X eine Menge. Die Bildung symmetrischer Differenzen und dass Schneiden von Teilmengen sind Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &\oplus : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &\cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \cap B \end{aligned}$$

auf der Potenzmenge.

(a) Zeigen Sie, dass $\cap$ kommutativ und assoziativ ist.
Beweis: Da $P \wedge Q$ für alle Aussagen P und Q äquivalent zu $Q \wedge P$ ist, gilt

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in X : x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Es folgt, dass $\cap$ kommutativ ist. Nach Hausaufgabe 1.1(d) gilt $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Darum ist $\cap$ assoziativ.

(b) Zeigen Sie, dass $\oplus$ kommutativ und assoziativ ist.
Beweis: Da $P \vee Q$ für alle Aussagen P und Q äquivalent zu $Q \vee P$ ist, gilt

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\} = \{x \in X : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Es folgt, dass

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \oplus A$$

und damit, dass $\oplus$ kommutativ ist. Um die Assoziativität von $\oplus$ zu zeigen, benötigen wir die folgenden Identitäten für $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \tag{1}$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \tag{2}$$
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C), \tag{3}$$
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C), \tag{4}$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{5}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \tag{6}$$

Die Identitäten (4), (5) und (6) wurden schon in HA 1.1 bewiesen; die restlichen Identitäten weist man in analoger Weise nach. Für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ folgt

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= \big((A \oplus B) \setminus C\big) \cup \big(C \setminus (A \oplus B)\big) \\
&= \Big(\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) \setminus C\Big) \cup \Big(C \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)\Big) \\
&\overset{(1)}{=} \big((A \setminus B) \setminus C\big) \cup \big((B \setminus A) \setminus C\big) \cup \Big(C \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)\Big) \\
&\overset{(2)}{=} \big((A \setminus B) \setminus C\big) \cup \big((B \setminus A) \setminus C\big) \cup \Big(\big(C \setminus (A \setminus B)\big) \cap \big(C \setminus (B \setminus A)\big)\Big) \\
&\overset{(3)}{=} \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \Big(\big(C \setminus (A \setminus B)\big) \cap \big(C \setminus (B \setminus A)\big)\Big) \\
&\overset{(4)}{=} \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \Big(\big((C \setminus A) \cup (C \cap B)\big) \cap \big((C \setminus B) \cup (C \cap A)\big)\Big) \\
&\overset{(5)}{=} \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \big((C \setminus A) \cap (C \setminus B)\big) \\
&\qquad \cup \big((C \setminus A) \cap (C \cap A)\big) \cup \big((C \cap B) \cap (C \setminus B)\big) \cup \big((C \cap B) \cap (C \cap A)\big) \\
&\overset{(2)}{=} \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \big(C \setminus (A \cup B)\big) \\
&\qquad \cup \big((C \setminus A) \cap (C \cap A)\big) \cup \big((C \cap B) \cap (C \setminus B)\big) \cup \big((C \cap B) \cap (C \cap A)\big) \\
&\overset{(6)}{=} \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \big(C \setminus (A \cup B)\big) \cup \big(A \cap B \cap C\big).
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen von A und C erhalten wir

$$\begin{aligned}
A \oplus (B \oplus C) &= (C \oplus B) \oplus A \\
&= \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \big(C \setminus (A \cup B)\big) \cup \big(A \cap B \cap C\big) \\
&= (A \oplus B) \oplus C.
\end{aligned}$$

Dies beweist, dass $\oplus$ assoziativ ist.

(c) Bestimmen Sie neutrale Elemente für $\cap$ und $\oplus$.
Lösung: Für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$A \cap X = A \qquad \text{und} \qquad A \oplus \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A$$

Darum sind X und $\emptyset$ neutrale Elemente für $\cap$ bzw. $\oplus$.

(d) Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathcal{P}(X)$ ein inverses Element bezüglich $\oplus$ besitzt.
Beweis: Für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$A \oplus A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$$

Es folgt, dass A ein inverses Element für A bezüglich $\oplus$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \oplus, \cap)$ einen Ring bildet.
Beweis: Nach PA 1.5 gilt das Distributivgesetz $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Aus (a)–(d) folgt jetzt, dass $(R, \oplus, \cap)$ ein Ring ist.

Präsenzaufgabe 3.6 Seien $(S, \oplus, \star)$ ein Ring und X eine nichtleere Menge. Sei $R = \{f : X \to S\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach S. Wir definieren auf R eine Addition und Multiplikation durch

$$(f + g)(x) := f(x) \oplus g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \star g(x) \qquad (f, g \in R, x \in X).$$

Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist.
Beweis: Da $\oplus$ und $\star$ assoziativ und kommutativ sind, gilt für all $f, g, h \in R$ und jedes $x \in X$

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(x) = f(x) \oplus g(x) = g(x) \oplus f(x) = (g+f)(x)\\
&\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x) \oplus h(x) = \big(f(x) \oplus g(x)\big) \oplus h(x)\\
&\qquad = f(x) \oplus \big(g(x) \oplus h(x)\big) = f(x) \oplus (g+h)(x) = \big(f + (g+h)\big)(x)\\
&(f \cdot g)(x) = f(x) \star g(x) = g(x) \star f(x) = (g \cdot f)(x)\\
&\big((f \cdot g) \cdot h\big)(x) = (f \cdot g)(x) \star h(x) = \big(f(x) \star g(x)\big) \star h(x) = f(x) \star \big(g(x) \star h(x)\big)\\
&\qquad = f(x) \star (g \cdot h)(x) = \big(f \cdot (g \cdot h)\big)(x).
\end{aligned}
$$

Dies zeigt, dass $+$ und $\cdot$ kommutativ und assoziativ sind. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &: X \to S, \quad x \mapsto 0,\\
\mathbf{1} &: X \to S, \quad x \mapsto 1.
\end{aligned}
$$

Für alle $f \in R$ und $x \in X$ gilt

$$
\begin{aligned}
\big(\mathbf{0} + f\big)(x) &= \mathbf{0}(x) \oplus f(x) = 0 \oplus f(x) = f(x)\\
\big(\mathbf{1} \cdot f\big)(x) &= \mathbf{1}(x) \star f(x) = 1 \star f(x) = f(x).
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass $\mathbf{0}$ ein neutrales Element für $+$ und $\mathbf{1}$ ein neutrales Element für $\cdot$ ist.
Wenn $f, g, h \in R$ und $x \in X$, dann

$$
\begin{aligned}
\big(f \cdot (g+h)\big)(x) &= f(x) \star (g+h)(x) = f(x) \star \big(g(x) \oplus h(x)\big) = f(x) \star g(x) \oplus f(x) \star h(x)\\
&= (f \cdot g)(x) \oplus (f \cdot h)(x) = (f \cdot g + f \cdot h)(x).
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass das Distributivgesetz für $+$ und $\cdot$ erfüllt ist.