Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 Sei $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir versehen $\mathbb{C}$ mit einer Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$, die für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$, gegeben sind durch

$$(x_1, x_2)+(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \quad \text{und} \quad (x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = (x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

ein injektiver Homomorphismus von Körpern ist.

Ab jetzt identifizieren wir $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}$ und betrachten $\mathbb{R}$ als ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Wir definieren $i := (0, 1)$.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathbb{C}$ eindeutige $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $z = x + iy$.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

ein Isomorphismus von Körpern ist.

Man nennt die obige Abbildung komplexe Konjugation und schreibt $\overline{z}$ für die komplex Konjugierte eines Elements $z \in \mathbb{C}$.

(e) Zeigen Sie, dass $\overline{(\overline{z})} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wenn $z \in \mathbb{C}$, dann nennt man $\mathrm{Re}(z) := \frac{z+\overline{z}}{2}$ den Realteil und $\mathrm{Im}(z) := \frac{z-\overline{z}}{2i}$ den Imaginairteil von z.

(f) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z + w) &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)\\
\mathrm{Im}(z + w) &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)\\
\mathrm{Re}(zw) &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)\\
\mathrm{Im}(zw) &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w).
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 4.2 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf X durch

$$x_1 \sim x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1, x_2 \in X \text{ und } f(x_1) = f(x_2).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$f : X/\sim \to Y, \quad [x] \mapsto f(x)$$

injektiv ist.

Präsenzaufgabe 4.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Weiter, sei

$$S_n := \{\sigma : X_n \to X_n : \sigma \text{ ist bijektiv}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass S_n zusammen mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe bildet.

Man nennt S_n die symmetrische Gruppe. Für $i, j \in X_n$ mit $i \neq j$ definieren wir

$$\tau_{i,j} : X_n \to X_n, \quad k \mapsto \begin{cases} j & (k = i) \\ i & (k = j) \\ k & (k \neq i, j) \end{cases}$$

Eine Element $\tau \in S_n$ wird eine Transposition genannt, wenn es $i, j \in X_n$ mit $i \neq j$ gibt, sodass $\tau = \tau_{i,j}$.

(b) Zeigen Sie, dass S_n durch Transpositionen erzeugt wird, d.h. für jedes Element $\sigma \in S_n$, gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_m$, sodass

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_m.$$

Präsenzaufgabe 4.4 Zeigen Sie, dass auf einer Menge mit vier Elementen eine Körperstruktur existiert.

Präsenzaufgabe 4.5 Der fermatsche Primzahltest ist ein Primzahltest, der auf dem kleinen fermatschen Satz beruht. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wähle ein $a \in \mathbb{Z}$. Wenn $[a]^{n-1} \neq [1]$, dann ist n keine Primzahl. Sonnst könnte n eine Primzahl sein. Betrachten Sie $n = 57$ und berechnen Sie $[2]^{56}$. Zeigen Sie damit, dass 57 keine Primzahl ist.

Hausaufgabe 4.1 Seien X und I Mengen. Für jedes $i \in I$, sei X_i eine Teilmenge von X. Nehmen Sie an, dass

$$\begin{aligned} &X_i \cap X_j = \emptyset \qquad (i \neq j), \\ &X = \bigcup_{i \in I} X_i. \end{aligned}$$

Wir definieren eine Relation $\sim$ auf X durch

$$x_1 \sim x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } i \in I, \text{ sodass } x_1, x_2 \in X_i.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hausaufgabe 4.2

(a) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$.

(b) Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Hausaufgabe 4.3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen sie ob m teilbar ist durch n, wobei

(a) $m = 47^{56}$, $n = 53$.

(b) $m = 2^{131} + 3^{238} + 5^{42}$, $n = 79$.

Hausaufgabe 4.4 Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Sei

$$R^\times := \{x \in R : \text{ es gibt ein } y \in R, \text{ sodass } x \cdot y = y \cdot x = 1\}.$$

(Die Elemente in $R^\times$ heißen Einheiten.)

(a) Beweisen Sie, dass $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie $R^\times$, falls $R = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

Hausaufgabe 4.5 Beweisen Sie den Satz von Schröder und Bernstein:

Seien X und Y Mengen. Wenn es injektive Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, dann gibt es eine bijektive Abbildung $h : X \to Y$.

Hinweis: Sie können wie folgt vorgehen. Definieren Sie $X_0 := X$ und $Y_0 := Y$. Definieren Sie weiter X_n und Y_n für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch

$$Y_n := f(X_{n-1}), \qquad \textit{und} \qquad X_n := X \setminus g(Y \setminus Y_n).$$

Zeigen Sie mit Induktion, dass $X_n \subseteq X_{n-1}$ und $Y_n \subseteq Y_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definieren Sie

$$X_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \qquad \textit{und} \qquad Y_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) \in Y_n$ für alle $x \in X_\infty$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie, dass $f(X_\infty) \subseteq Y_\infty$. Verwenden Sie die Injektivität von f, um zu zeigen, dass für jedes $y \in Y_\infty$ ein $x \in X_\infty$ existiert, sodass $f(x) = y$. Folgern Sie, dass die Abbildung

$$X_\infty \to Y_\infty, \quad x \mapsto f(x)$$

eine Bijektion ist. Beweisen Sie, dass es für alle $y \in Y \setminus Y_\infty$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $g(y) \notin X_n$. Folgern Sie, dass $g(Y \setminus Y_\infty) \subseteq X \setminus X_\infty$. Beweisen Sie, dass es für alle $x \in X \setminus X_\infty$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $y \in Y \setminus Y_n$ gibt, sodass $g(y) = x$. Folgern Sie, dass

$$g : Y \setminus Y_\infty \to X \setminus X_\infty, \quad y \mapsto g(y)$$

eine Bijektion ist. Definieren Sie jetzt die Abbildung $h : X \to Y$ durch

$$\{h(x)\} = \begin{cases} \{f(x)\} & (x \in X_\infty) \\ g^{-1}(\{x\}) & (x \notin X_\infty) \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass h eine Bijektion ist.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 15.11.2024 in Panda.