Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Sei R ein Ring mit der Eigenschaft, dass $xy \neq 0$ für alle $x, y \in R^\times := R \setminus \{0\}$. Wir definieren eine Relation auf $R \times R^\times$ durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \Leftrightarrow \quad m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $R \times R^\times$ ist.

Wir setzen $K = \big(R \times R^\times\big)/\sim$ und schreiben $\frac{m}{n}$ für die Äquivalenzklasse, die das Element (m, n) enthält.

(b) Seien $(m_1, n_1), (k_1, l_1), (m_2, n_2), (k_2, l_2) \in R \times R^\times$ sodass $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ und $(k_1, l_1) \sim (k_2, l_2)$. Zeigen Sie, dass

$$(m_1 l_1 + k_1 n_1, n_1 l_1) \sim (m_2 l_2 + k_2 n_2, n_2 l_2),$$
$$(m_1 k_1, n_1 l_1) \sim (m_2 k_2, n_2 l_2).$$

Die vorherige Teilaufgabe zeigt, dass die Äquivalenzklassen $\frac{ml+kn}{nl}$ und $\frac{mk}{nl}$ nicht von den Wahlen der Repräsentanten in den Äquivalenzklassen $\frac{m}{n}$ und $\frac{k}{l}$ abhängen. Daher können wir eine Addition und Multiplikation auf K mit

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} := \frac{ml + kn}{nl}$$
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} := \frac{mk}{nl}$$

definieren.

(c) Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(d) Zeigen, Sie, dass die Abbildung

$$R \to K, \quad m \mapsto \frac{m}{1}$$

ein injektiver Ringmorphismus ist.

Wenn $R = \mathbb{Z}$, dann ergibt diese Konstruktion den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Präsenzaufgabe 5.2 Bestimmen Sie Polynomfunktionen $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(g),$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + 1$,

(b) $f(x) = 7x^8 - x^2$ und $g(x) = x^3 - 1$.

Präsenzaufgabe 5.3 Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.

Präsenzaufgabe 5.4 Bestimmen Sie alle mögliche Produkte XY von Matrizen

$$X, Y \in \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Präsenzaufgabe 5.5 Beschreiben Sie die Matrikmultiplikation

(a) $\Phi : M(n \times 1, K) \times M(1 \times n, K) \to M(n \times n, K)$

(b) $M(1 \times n, K) \times M(n \times 1, K) \to M(1 \times 1, K)$

explizit. Zeigen Sie, dass $\Phi(A, B)$ für alle $A \in M(n \times 1, K)$ und $B \in M(1 \times n, K)$ linear abhängige Spalten hat.

Hausaufgabe 5.1 Bestimmen Sie Polynomfunktionen $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(g),$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = 6x^7 - x^4 - 3x^2 + 1$ und $g(x) = 2x^2 - 3$,

(b) $f(x) = 5x^8 + x^3$ und $g(x) = x + 2$.

Hausaufgabe 5.2 Sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ ein Unterraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

Hausaufgabe 5.3 Sie K ein Körper und seien $0_K, 1_K \in K$ die neutralen Elemente für Addition bzw. Multiplikation. Wir definieren $\phi : \mathbb{Z} \to K$ durch

$$\phi(n) := \sum_{k=1}^{n} 1_K,$$

falls $n \in \mathbb{N}$, $\phi(0) = 0_K$ und $\phi(n) := -\phi(-n)$, falls $n \in -\mathbb{N}$. Sei

$$N := \{n \in \mathbb{Z} : \phi(n) = 0_K\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ ein Ringmorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass N eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.

(c) Folgern Sie, dass es ein $p \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $N = p\mathbb{Z} := \{kp : k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Zeigen Sie, dass p eine Primzahl ist oder $p = 0$.

Man nennt p die Charakteristik von K.

Hausaufgabe 5.4 Seien $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $x_i \neq x_j$, falls $i \neq j$. Gesucht sind Koeffizienten $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass die Polynomfunktion n-ten Grades

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

die Gleichungen

$$p(x_j) = y_j \qquad (j = 0, \dots, n) \tag{1}$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass dieses Interpolationsproblem auf das lineare Gleichungssystem $Vc = y$, mit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

führt.

(b) Für $j = 0, \dots, n$ sei

$$L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

das j-te Langrange Interpolationspolynom. Zeigen Sie, dass

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=0}^{n} y_j L_j$$

eine Lösung von (1) ist.

(c) Für $j = 0, \dots, n$ seien $L_{0,j}, \dots, L_{n,j} \in \mathbb{R}$, sodass

$$L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{k,j} x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und sei

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & \dots & L_{0,n} \\ L_{1,0} & L_{1,1} & \dots & L_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n,0} & L_{n,1} & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $VL = E$ mit E der Einheitsmatrix ist.

(d) Ist die Abbildung

$$T_V : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}; \quad c \mapsto Vc$$

bijektiv?

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 22.11.2024 in Panda.