Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

5. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 5.1 Bestimmen Sie Polynomfunktionen $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(g),$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = 6x^7 - x^4 - 3x^2 + 1$ und $g(x) = 2x^2 - 3$,
Lösung: Seien $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = 3x^5 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{9}{4} \quad \text{und} \quad r(x) = \frac{81}{4}x - \frac{23}{4}.$$

Dann gilt $f = qg + r$ und $\deg(r) = 1 < 2 = \deg(g)$.

(b) $f(x) = 5x^8 + x^3$ und $g(x) = x + 2$.
Lösung: Seien $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = 5x^7 - 10x^6 + 20x^5 - 40x^4 + 80x^3 - 159x^2 + 318x - 636 \quad \text{und} \quad r(x) = 1272.$$

Dann gilt $f = qg + r$ und $\deg(r) = 0 < 1 = \deg(g)$.

Hausaufgabe 5.2 Sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ ein Unterraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.
Lösung: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Es gibt $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ und $d_0, \dots, d_m \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} d_k x^k.$$

Es gilt

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (c_k + d_k)x^k,$$

wobei $c_k := 0$ für alle $k > n$ und $d_k := 0$ für alle $k > m$. Es folgt, dass $f + g \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$. Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$, dann

$$(\lambda f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda c_k)x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Darum gilt auch $\lambda f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$. Da die Konstante-0-Abbildung eine Polynomfunktion ist, ist $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Es folgt, dass $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ ein Unterraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ist.

Hausaufgabe 5.3 Sei K ein Körper und seien $0_K, 1_K \in K$ die neutralen Elemente für Addition bzw. Multiplikation. Wir definieren $\phi : \mathbb{Z} \to K$ durch

$$\phi(n) := \sum_{k=1}^{n} 1_K,$$

falls $n \in \mathbb{N}$, $\phi(0) = 0_K$ und $\phi(n) := -\phi(-n)$, falls $n \in -\mathbb{N}$. Sei

$$N := \{n \in \mathbb{Z} : \phi(n) = 0_K\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ ein Ringmorphismus ist.
Beweis: Es gilt $\phi(1) = 1_K$ und $\phi(0) = 0_K$. Wenn $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$, dann

$$\begin{aligned}
\phi(n+m) &= \sum_{k=1}^{n+m} 1_K = \left(\sum_{k=1}^{n} 1_K\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} 1_K\right) = \phi(n) + \phi(m) \\
\phi(n-m) &= \sum_{k=1}^{n-m} 1_K = \left(\sum_{k=1}^{n} 1_K\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} 1_K\right) = \phi(n) - \phi(m) = \phi(n) + \phi(-m) \\
\phi(-n+m) &= -\phi(n-m) = -\big(\phi(n) + \phi(-m)\big) = -\phi(n) - \phi(-m) = \phi(-n) + \phi(m) \\
\phi(-n-m) &= -\phi(n+m) = -\big(\phi(n) + \phi(m)\big) = -\phi(n) - \phi(m) = \phi(-n) + \phi(-m) \\
\phi(nm) &= \sum_{k=1}^{nm} 1_K = \sum_{k=1}^{nm} 1_K 1_K = \left(\sum_{k=1}^{n} 1_K\right)\left(\sum_{k=1}^{m} 1_K\right) = \phi(n)\phi(m) \\
\phi\big((-n)m\big) &= \phi(-nm) = -\phi(nm) = -\phi(n)\phi(m) = \phi(-n)\phi(m) \\
\phi\big(n(-m)\big) &= \phi(-nm) = -\phi(nm) = -\phi(n)\phi(m) = \phi(n)\phi(-m) \\
\phi\big((-n)(-m)\big) &= \phi(nm) = \phi(n)\phi(m) = \big(-\phi(n)\big)\big(-\phi(m)\big) = \phi(-n)\phi(-m).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\phi(n+0) &= \phi(n) = \phi(n) + 0_K = \phi(n) + \phi(0) \\
\phi(0n) &= \phi(0) = 0_K = 0_K\phi(n) = \phi(0)\phi(n).
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass ϕ ein Ringmorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass N eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.
Beweis: Wenn $n, m \in N$, dann $\phi(n+m) = \phi(n) + \phi(m) = 0_K + 0_K = 0_K$ und und damit $n + m \in N$. Es folgt, dass N eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.

(c) Folgern Sie, dass es ein $p \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $N = p\mathbb{Z} := \{kp : k \in \mathbb{Z}\}$.
Beweis: Nach Präsenzaufgabe 5.3 ist eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{Z}$ genau dann eine Untergruppe, wenn $G = p\mathbb{Z}$ für ein $p \in \mathbb{N}_0$.

(d) Zeigen Sie, dass p eine Primzahl ist oder $p = 0$.
Beweis: Wenn $p = 1$, dann $1 \in N$ und darum $1_K = \phi(1) = 0_K$. Dies ist ein Widerspruch. Wenn $n \geq 4$ nicht prim ist, dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 < a, b < p$, sodass $p = ab$. Dann gilt $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = 0_K$. Es folgt, dass $\phi(a) = 0_K$ oder $\phi(b) = 0_K$. Darum $a \in N = p\mathbb{Z}$ oder $b \in N = p\mathbb{Z}$. Da $1 < a, b < p$ ist, ist dies ein Widerspruch. Es folgt, dass $p = 0$ oder p prim ist.

Man nennt p die Charakteristik von K.

Hausaufgabe 5.4 Seien $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $x_i \neq x_j$, falls $i \neq j$. Gesucht sind Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass die Polynomfunktion n-ten Grades

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

die Gleichungen

$$p(x_j) = y_j \qquad (j = 0, \ldots, n) \tag{1}$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass dieses Interpolationsproblem auf das lineare Gleichungssystem $Vc = y$, mit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

führt.

Beweis: Die Gleichung (1) ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{n} c_0 x_0^k = y_0$$
$$\sum_{k=0}^{n} c_1 x_1^k = y_1$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=0}^{n} c_n x_n^k = y_n$$

und damit zum

$$Vc = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} c_0 x_0^k \\ \sum_{k=0}^{n} c_1 x_1^k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} c_n x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y.$$

(b) Für $j = 0, \dots, n$ sei

$$L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

das j-te Langrange Interpolationspolynom. Zeigen Sie, dass

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=0}^{n} y_j L_j$$

eine Lösung von (1) ist.

Beweis: Jede Abbildung $x \mapsto \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ ist eine Polynomfunktion von Grad 1. Darum ist sind die L_j Polynomfunktionen von Grad n und. Es folgt, dass $p = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j$ eine Polynomfunktion von Grad kleiner gleich n ist. Weiter gilt

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

und damit

$$p(x_k) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

(c) Für $j = 0, \dots, n$ seien $L_{0,j}, \dots, L_{n,j} \in \mathbb{R}$, sodass

$$L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{k,j} x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und sei

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & \dots & L_{0,n} \\ L_{1,0} & L_{1,1} & \dots & L_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n,0} & L_{n,1} & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $VL = E$ mit E der Einheitsmatrix ist.
Beweis: Seien $0 \leq i, j \leq n$. Es gilt

$$(VL)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} V_{i,k} L_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} x_i^k L_{k,j} = L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

und darum

$$VL = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Ist die Abbildung

$$T_V : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}; \quad c \mapsto Vc$$

bijektiv?
Lösung: Wir werden zeigen, dass T_V bijektiv ist.

Wenn $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, dann gilt für $c = Ly$, dass

$$T_V(c) = Vc = VLy = \mathrm{Id}y = y.$$

Es folgt, dass T_V surjektiv ist. Wenn $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $T_V(\gamma) = T_V(\delta)$, dann $T_V(\gamma - \delta)$. Sei $c = \gamma - \delta$. Dann $T_V(c) = 0$. Die Polynomfunktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

erfüllt

$$p(x_0) = p(x_1) = \dots = p(x_n) = 0.$$

Da $x_i \neq x_j$, falls $i \neq j$, besitzt p mindestens $n + 1$ unterschiedliche Nullstellen. Ein Polynomfunktion von Grad kleiner gleich n ist die Nullfunktion oder besitzt maximal n Nullstellen. Es folgt, dass p die Nullfunktion ist. Dies zeigt, dass $c = 0$ und damit $\gamma = \delta$. Es folgt, dass T_V injektiv ist.