Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

5. Übungsblatt - Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 5.2 Bestimmen Sie Polynomfunktionen $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(g),$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + 1$.
Lösung: Seien $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = x^4 - 2x^2 + 4 \quad \text{und} \quad r(x) = -3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Dann

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg(r) = 0 < 2 = \deg(g).$$

(b) $f(x) = 7x^8 - x^2$ und $g(x) = x^3 - 1$.
Lösung: Seien $q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = 7x^5 + 7x^2 \quad \text{und} \quad r(x) = 6x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Dann

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg(r) = 2 < 3 = \deg(g).$$

Präsenzaufgabe 5.3 Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.
Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Teilmenge $n\mathbb{Z} := \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, da $n\mathbb{Z}$ unter Addition abgeschlossen ist und wenn $x \in n\mathbb{Z}$, dann auch $-x \in n\mathbb{Z}$. Wir behaupten, dass jede Untergruppe G von $\mathbb{Z}$ der Form $G = n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist.
Wenn $G = \{0\}$ die triviale Untergruppe ist, dann gilt $G = 0\mathbb{Z}$. Wenn $G \neq 0\mathbb{Z}$, dann ist $G \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Es gibt darum ein $x \in G$, sodass $x \neq 0$. Wenn $x < 0$, dann $-x > 0$ und $-x \in G$. Wir können daher annehmen, dass G streng positive Elemente enthält. Sei $n = \min\{x \in G : x > 0\}$. Da G eine Untergruppe ist und $n \in G$, gilt $n\mathbb{Z} \subseteq G$. Sei $x \in G$. Es gibt $k, r \in \mathbb{Z}$, sodass $x = kn + r$ und $0 \leq r < n$. Weil $x \in G$ und $kn \in n\mathbb{Z} \subseteq G$, folgt, dass $r \in G$. Da $0 \leq r < \min\{x \in G : x > 0\}$ gilt $r = 0$ und darum $x = kn \in n\mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass $G = n\mathbb{Z}$.

Präsenzaufgabe 5.5 Beschreiben Sie die Matrikmultiplikation

(a) $\Phi : M(n \times 1, K) \times M(1 \times n, K) \to M(n \times n, K)$

(b) $M(1 \times n, K) \times M(n \times 1, K) \to M(1 \times 1, K)$

explizit. Zeigen Sie, dass $\Phi(A, B)$ für alle $A \in M(n \times 1, K)$ und $B \in M(1 \times n, K)$ linear abhängige Spalten hat.

Lösung: Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1, K)$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in M(1 \times n, K)$.

Es gilt

$$xy = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ y_1x & y_2x & \dots & y_nx \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

Jede Spalte von xy ist ein Vielfaches von x. Weiter gilt

$$yx = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$