Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen mit Multiplizitäten von

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36.$$

Hinweis: 1 *und* 3 *sind Nullstellen von* $p(x)$.

Präsenzaufgabe 6.2 Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x+1) = f(x) + 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x+1) = f(x)^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Hier bezeichnet $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 6.3 Zeigen Sie, dass die Vektoren in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

Präsenzaufgabe 6.4 Zeigen Sie, dass die Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\\pi\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$$

linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ aber nicht linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

Präsenzaufgabe 6.5 Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x) + x, \\ \chi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x) - x, \\ \theta &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \cos(x) \end{aligned}$$

linear unabhängig in $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

Präsenzaufgabe 6.6 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\3\\4\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}-2\\4\\6\\-2\end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix}4\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$v_4 = v_3 - v_2, \quad v_5 = 2v_2, \quad v_6 = v_1 - v_2.$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $V = \operatorname{span}\big(\{v_j : 1 \leq j \leq 6\}\big)$ mit

$$B \not\subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}.$$

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Teilmengen $B \subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}$, sodass B eine Basis von V ist.

Hausaufgabe 6.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen mit Multiplizitäten von $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, wobei

(a) $p(x) = 3x^6 - \frac{3}{2}x^5 - \frac{105}{4}x^4 + \frac{15}{8}x^3 + \frac{285}{8}x^2 - 24x + \frac{9}{2}$.

(b) $p(x) = 2x^5 - (2 + 14i)x^4 - (36 - 14i)x^3 + (36 + 40i)x^2 + (16 - 40i)x - 16$.

Hinweis: alle Nullstellen sind enthalten in $\{-2, \frac{1}{2}, 1, 3, i, 2i\}$.

Hausaufgabe 6.2 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Nehmen Sie an, dass $\dim(V) = n$ und $|K| = m$. Zeigen Sie, dass

$$|V| = m^n.$$

Hausaufgabe 6.3 Bestimmen Sie für jede der folgenden Paare von Vektorräumen V über $\mathbb{R}$ und Teilmengen U von V, ob U ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis und die Dimension von U.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} (x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{x \in V : x_1 = 2x_3\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{x \in V : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$.

Hausaufgabe 6.4 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K) : A \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$$

ein Unterring von $\mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist.

Hausaufgabe 6.5 Sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $V := \{p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) : \deg(p) \leq 2\}$ und seien $p_1, p_2, p_3 \in V$ gegeben durch

$$p_1 : x \mapsto x^2 + x + 1$$
$$p_2 : x \mapsto x^2 + 2x + 1$$
$$p_3 : x \mapsto 3x + 1.$$

(a) Zeigen Sei, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis von V ist.

(b) Für $j = 0, 1, 2$, sei $q_j \in V$ gegeben durch

$$q_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^j.$$

Schreiben Sie q_1, q_2 und q_3 als Linearkombinationen von p_1, p_2 und p_3.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 29.11.2024 in Panda.