Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

6. Übungsblatt

Hausaufgabe 6.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen mit Multiplizitäten von $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, wobei

(a) $p(x) = 3x^6 - \frac{3}{2}x^5 - \frac{105}{4}x^4 + \frac{15}{8}x^3 + \frac{285}{8}x^2 - 24x + \frac{9}{2}$.
Lösung: Es gilt

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 3\cdot\frac{1}{64} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{32} - \frac{105}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{285}{8}\cdot\frac{1}{4} - 24\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{3 - 3 - 105 + 15 + 570 - 768 + 288}{64} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}p(x) &= x^6 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{35}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{95}{8}x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)x^5 - \frac{35}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{95}{8}x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^5 - \frac{35}{4}x^3\right) - \frac{30}{8}x^3 + \frac{95}{8}x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2\right) + 10x^2 - 8x + \frac{3}{2} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x\right) - 3x + \frac{3}{2} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3\right).
\end{aligned}$$

Sei $p_1(x) = x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3$. Es gilt

$$p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} - \frac{35}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{30}{8}\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{2} - 3 = \frac{1 - 35 - 30 + 160 - 96}{32} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^5 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)x^4 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{35}{4}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{2}x^3\right) - \frac{17}{2}x^3 - \frac{30}{8}x^2 + 10x - 3 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2\right) - 8x^2 + 10x - 3 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x\right) + 6x - 3 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6\right).
\end{aligned}$$

Sei $p_2(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6$. Es gilt

$$p_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{4} - 8\cdot\frac{1}{2} + 6\frac{1 + 1 - 34 - 64 + 96}{16} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)x^3 + x^3 - \frac{17}{2}x^2 - 8x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 + x^2\Big) - 8x^2 - 8x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 + x^2 - 8x\Big) - 12x + 6 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 + x^2 - 8x - 12\Big).
\end{aligned}$$

Sei $p_3(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&p_3\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} - 12 = \frac{1 + 2 - 32 - 96}{8} = \frac{-125}{8} \neq 0, \\
&p_3(-2) = -8 + 4 - 8(-2) - 12 = 0,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= x^3 + x^2 - 8x - 12 \\
&\big(x + 2\big)x^2 - x^2 - 8x - 12 \\
&\big(x + 2\big)\big(x^2 - x\big) - 6x - 12 \\
&\big(x + 2\big)\big(x^2 - x - 6\big) \\
&\big(x + 2\big)\big(x + 2\big)\big(x - 3\big) \\
&\big(x + 2\big)^2\big(x - 3\big).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$p(x) = 3\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^3\big(x + 2\big)^2\big(x - 3\big).$$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind damit $\frac{1}{2}$ mit Multiplizität 3, -2 mit Multiplizität 2 und 3 mit Multiplizität 1.

(b) $p(x) = 2x^5 - (2 + 14i)x^4 - (36 - 14i)x^3 + (36 + 40i)x^2 + (16 - 40i)x - 16$.
Lösung: Es gilt

$$p(1) = 2 - (2 + 14i) - (36 - 14i) + (36 + 40i) + (16 - 40i) - 16 = 0.$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p(x) &= x^5 - (1 + 7i)x^4 - (18 - 7i)x^3 + (18 + 20i)x^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)x^4 - 7ix^4 - (18 - 7i)x^3 + (18 + 20i)x^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3\big) - 18x^3 + (18 + 20i)x^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3 - 18x^2\big) + 20ix^2 + (8 - 20i)x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix\big) + 8x - 8 \\
&= \big(x - 1\big)\big(x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8\big).
\end{aligned}$$

Sei $p_1(x) = x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&p_1(1) = 1 - 7i - 18 + 20i + 8 = -9 + 13i \neq 0, \\
&p_1(i) = 1 - 7i \cdot (-i) - 18 \cdot (-1) + 20i \cdot i + 8 = 1 - 7 + 18 - 20 + 8 = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^4 - 7ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8\\
&= (x-i)x^3 - 6ix^3 - 18x^2 + 20ix + 8\\
&= (x-i)\left(x^3 - 6ix^2\right) - 12x^2 + 20ix + 8\\
&= (x-i)\left(x^3 - 6ix^2 - 12x\right) + 8ix + 8\\
&= (x-i)\left(x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i\right).
\end{aligned}$$

Sei $p_2(x) = x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i$. Es gilt

$$\begin{aligned}
p_2(i) &= -i - 6i\cdot(-1) - 12i + 8i = -9i \neq 0\\
p_2(2i) &= -8i - 6i\cdot(-4) - 12\cdot 2i + 8i = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i\\
&= (x-2i)x^2 - 4ix^2 - 12x + 8i\\
&= (x-2i)\left(x^2 - 4ix\right) - 4x + 8i\\
&= (x-2i)\left(x^2 - 4ix - 4\right)\\
&= (x-2i)(x-2i)(x-2i)\\
&= (x-2i)^3.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$p(x) = 2(x-1)(x-i)(x-2i)^3.$$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind damit 1 mit Multiplizität 1, i mit Multiplizität 1 und $2i$ mit Multiplizität 3.

Hausaufgabe 6.2 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Nehmen Sie an, dass $\dim(V) = n$ und $|K| = m$. Zeigen Sie, dass

$$|V| = m^n.$$

Lösung: Weil $\dim(V) = n$ gibt es eine Basis von V mit genau n Elemente. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. Da jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$, mit $c_1, \ldots, c_n \in K$, geschrieben werden kann, gilt

$$|V| = |\{(c_1, \ldots, c_n) : c_1, \ldots, c_n \in K\}| = |K^n| = |K|^n.$$

Wenn $|K| = m$, dann folgt $|V| = m^n$.

Hausaufgabe 6.3 Bestimmen Sie für jede der folgenden Paare von Vektorräumen V über $\mathbb{R}$ und Teilmengen U von V, ob U ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis und die Dimension von U.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung: Es gilt

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

Damit ist U ein Unterraum. Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von U und die Dimension von U ist daher gleich 2.

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.
Lösung: U ist kein Unterraum. Es gilt

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in [0, \infty) \right\}$$

und darum $(0,1) \in U$, aber $(-1) \cdot (0,1) = (0,-1) \notin U$.

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{x \in V : x_1 = 2x_3\}$.
Lösung: U ist ein Unterraum

- $O \in U$
- Wenn $x, y \in U$, dann $(x+y)_1 = x_1 + y_1 = 2x_3 + 2y_3 = 2(x+y)_3$ und darum $x + y \in U$.
- Wenn $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann $(\lambda x)_1 = \lambda x_1 = \lambda 2x_3 = 2(\lambda x)_3$ und darum $\lambda x \in U$.

Wenn $x \in U$, dann $x_1 = 2x_3$, und darum

$$x = (2c, b, c, d) = b(0,1,0,0) + c(2,0,1,0) + d(0,0,0,1)$$

für bestimmte $b, c, d \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $U = \operatorname{span}(\{(0,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\})$. Wenn $b, c, d \in \mathbb{R}$ und $b(0,1,0,0)+c(2,0,1,0)+d(0,0,0,1) = O$, dann $(2c, b, c, d) = (0,0,0,0)$ und damit $b = c = d = 0$. Die Menge $\{(0,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ ist deshalbe eine Basis von U. Die Dimension von U ist gleich 3.

(d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{x \in V : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$.
Lösung: U is kein Unterraum: $(1,1,0,0), (1,-1,0,0) \in U$, aber

$$(1,1,0,0) + (1,-1,0,0) = (2,0,0,0) \notin U.$$

Hausaufgabe 6.4 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K) : A \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$$

ein Unterring von $\operatorname{Mat}_{n,n}(K)$ ist.
Lösung: Wenn $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$, dann gilt genau dann $X \in U$, wenn $x_{i,j} = 0$ für alle $1 \le j < i \le n$. Die Einheitsmatrix I_n besitzt diese Eigenschaft und darum $I_n \in U$. Für alle $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}, Y = (y_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in U$ folgt für alle $1 \le j < i \le n$

$$\begin{aligned} (X+Y)_{i,j} &= x_{i,j} + y_{i,j} = 0 + 0 = 0, \\ (XY)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} y_{k,j} = \sum_{i \le k \le j} x_{i,k} y_{k,j} = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist gleich 0 weil $i > j$. Es folgt, dass $X + Y, XY \in U$. Wenn $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, dann gilt $(-X)_{i,j} = -x_{i,j} = 0$ für alle $1 \le j < i \le n$. Darum $-X \in U$. Es folgt, dass U ein Unterring von $\operatorname{Mat}_{n,n}(K)$ ist.

Hausaufgabe 6.5 Sei $\operatorname{Pol}(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $V := \{p \in \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) : \deg(p) \le 2\}$ und seien $p_1, p_2, p_3 \in V$ gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1 &: x \mapsto x^2 + x + 1 \\ p_2 &: x \mapsto x^2 + 2x + 1 \\ p_3 &: x \mapsto 3x + 1. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sei, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis von V ist.
Lösung: Seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Wenn $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&(c_1 + c_2)x^2 + (c_1 + 2c_2 + 3c_3)x + (c_1 + c_2 + c_3) \\
&\qquad = c_1(x^2 + x + 1) + c_2(x^2 + 2x + 1) + c_3(3x + 1) \\
&\qquad = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \quad \text{and} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

und darum

$$\begin{aligned}
c_3 &= (c_1 + c_2 + c_3) - (c_1 + c_2) = 0, \\
c_2 &= (c_1 + 2c_2 + 3c_3) - (c_1 + c_2) - 3c_3 = 0, \\
c_1 &= (c_1 + c_2) - c_2 = 0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass p_1, p_2 und p_3 linear unabhängig sind.
Wenn $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(-d_2 - d_1 + 3d_0)p_1(x) + (2d_2 + d_1 - 3d_0)p_2(x) + (d_0 - d_2)p_3(x) \\
&\quad = \Big((-d_2 - d_1 + 3d_0) + (2d_2 + d_1 - 3d_0)\Big)x^2 \\
&\qquad + \Big((-d_2 - d_1 + 3d_0) + 2(2d_2 + d_1 - 3d_0) + 3(d_0 - d_2)\Big)x \\
&\qquad + \Big((-d_2 - d_1 + 3d_0) + (2d_2 + d_1 - 3d_0) + (d_0 - d_2)\Big) \\
&\quad = d_2 x^2 + d_1 x + d_0
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\operatorname{span}\big(\{p_1, p_2, p_3\}\big) = V$.

(b) Für $j = 0, 1, 2$, sei $q_j \in V$ gegeben durch

$$q_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^j.$$

Schreiben Sie q_1, q_2 und q_3 als Linearkombinationen von p_1, p_2 und p_3.
Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&3p_1(x) - 3p_2(x) + p_3(x) = 1, \\
&- p_1(x) + p_2(x) = x, \\
&- p_1(x) + 2p_2(x) - p_3(x) = x^2.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
&3p_1 - 3p_2 + p_3 = q_0, \\
&- p_1 + p_2 = q_1, \\
&- p_1 + 2p_2 - p_3 = q_2.
\end{aligned}$$