Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$v_4 = v_3 - v_2, \quad v_5 = 2v_2, \quad v_6 = v_1 - v_2.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} v_3 - v_2 &= (0,3,4,0) - (-1,2,3,-1) = (1,1,1,1) = v_4, \\ v_5 &= (-2,4,6,-2) = 2(-1,2,3,-1) = 2v_2, \\ v_1 - v_2 &= (3,2,1,0) - (-1,2,3,-1) = (4,0,-2,1) = v_6. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $V = \operatorname{span}\big(\{v_j : 1 \le j \le 6\}\big)$ mit

$$B \not\subseteq \{v_j : 1 \le j \le 6\}.$$

Lösung: Wir behaupten, dass v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind. Um dies zu beweisen, seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und nehme an, dass $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_2 = O$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &3c_1 - c_2 = 0 \\ &2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ &c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0 \\ &-c_2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir $c_2 = 0$. Die erste Gleichung ergibt dann $c_1 = 0$. Da $c_1 = c_2 = 0$ ist, zeigt die zweite Gleichung, dass $c_3 = 0$. Dies zeigt, dass v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

Wenn $w \in \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$, dann sind v_1, v_2, v_3, w linear abhängig. Um dies zu zeigen, seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. Dann gilt $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + (-1)w = O$. Weil $-1 \neq 0$, folgt, dass v_1, v_2, v_3, w linear abhängig sind. Aus (a) folgt, das $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine maximale Teilmenge von linear unabhängige Vektoren und damit eine Basis von V ist. Darum gilt $\dim(V) = 3$. Es folgt, dass jede Teilmenge von 3 linear unabhängige Vektoren eine Basis von V ist.

Weil v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, sind auch $2v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig. Die Menge $\{2v_1, v_2, v_3\}$ ist damit eine Basis. Es gilt $2v_1 \neq v_j$ für alle $1 \le j \le 6$ und darum ist $\{2v_1, v_2, v_3\}$ nicht in $\{v_j : 1 \le j \le 6\}$ enhalten.

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Teilmengen $B \subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}$, sodass B eine Basis von V ist.

Lösung: Weil $\dim(V) = 3$, besitzt jede Basis von V genau 3 Elemente. Sei $\mathcal{B} \subseteq \{v_j : 1 \leq j \leq 6\}$ mit $|\mathcal{B}| = 3$. $\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis, wenn die Elemente von $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind. Es gibt $\binom{6}{3} = 20$ Teilmengen $\mathcal{B}$ von $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ mit $|\mathcal{B}| = 3$. Weil v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, folgt nach (a), dass

- $v_4 \notin \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$,
- $v_4 \notin \operatorname{span}(\{v_1, v_3\})$,
- $v_6 \notin \operatorname{span}(\{v_1, v_3\})$,
- $v_6 \notin \operatorname{span}(\{v_2, v_3\})$,
- $v_4 \notin \operatorname{span}(\{v_1, v_6\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$,
- $v_4 \notin \operatorname{span}(\{v_2, v_6\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$,
- $v_6 \notin \operatorname{span}(\{v_3, v_4\}) = \operatorname{span}(\{v_2, v_3\})$.

Darum sind

1. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$,
2. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_4\}$,
3. $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, v_4\}$,
4. $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, v_6\}$,
5. $\mathcal{B} = \{v_1, v_4, v_6\}$,
6. $\mathcal{B} = \{v_2, v_3, v_6\}$,
7. $\mathcal{B} = \{v_2, v_4, v_6\}$,
8. $\mathcal{B} = \{v_3, v_4, v_6\}$

Basen. Nach (a) sind

9. $\mathcal{B} = \{v_2, v_3, v_4\}$,
10. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_6\}$

keine Basen.

Weil $v_5 = 2v_2$, folgt aus den Fällen 1, 2, 6, 7, 9 und 10, dass

11. $\mathcal{B} = \{v_1, v_5, v_3\}$,
12. $\mathcal{B} = \{v_1, v_5, v_4\}$,
13. $\mathcal{B} = \{v_5, v_3, v_6\}$,
14. $\mathcal{B} = \{v_5, v_4, v_6\}$,

Basen sind und

15. $\mathcal{B} = \{v_5, v_3, v_4\}$,
16. $\mathcal{B} = \{v_1, v_5, v_6\}$

keine Basen sind. Wenn $v_2, v_5 \in \mathcal{B}$ dann ist $\mathcal{B}$ keine Base. Darum sind

17. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_5\}$,
18. $\mathcal{B} = \{v_2, v_3, v_5\}$,
19. $\mathcal{B} = \{v_2, v_4, v_5\}$,
20. $\mathcal{B} = \{v_2, v_5, v_6\}$

keine Basen.