Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Sei K ein endlicher Körper und $R : K[X] \to \mathrm{Pol}(K)$ die Abbildung, die jedem Polynom die entsprechende Polynomfunktion zuordnet. Sei $n = |K|$ und seien $x_1, \ldots, x_n$ die Elemente von K.

(a) Sei $q(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - x_j) \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $R\big(q(X)\big) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\ker(R) = \big\{q(X)p(X) : p(X) \in K[X]\big\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $R(1), R(X), \ldots, R(X^{n-1}) \in \mathrm{Pol}(K)$ eine Basis von $\mathrm{Pol}(K)$ bildet.

(d) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : K \to K$ eine Polynomfunktion ist.

(e) Sei jetzt p eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_p$. Zeigen Sie, dass $q(X) = X^p - X$.

Präsenzaufgabe 7.2 Sei $V = \mathbb{C}^3$ und sei $U = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}\right) \subseteq V$. Bestimmen Sie Unterräume W, sodass

(a) $V = U \oplus W$.

(b) $V = U + W$, aber V nicht die direkte Summe von U und W ist.

(c) $U + W \neq V$.

Präsenzaufgabe 7.3 Sei V ein Vektorraum und seien U und W Unterräume. Zeigen Sie, dass

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Präsenzaufgabe 7.4 Für $t \geq 0$ sei

$$f_t : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x + t}.$$

Zeigen Sie, dass die Teilmenge $Q = \{f_t : t \geq 0\}$ von $\mathcal{F}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ linear unabhängig ist.

Präsenzaufgabe 7.5 Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Projektion auf V ist eine lineare Abbildung $P : V \to V$, sodass $P \circ P = P$.

(a) Seien U und W Unterräume von V, sodass $V = U \oplus W$. Sei $P : V \to V$ eine Abbildung gegeben durch

$$P(u + w) = u \qquad (u \in U, w \in W).$$

Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $P : V \to V$ eine Projektion ist. Zeigen Sie, dass

$$V = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P)$$

und

$$P(u + w) = u \qquad \big(u \in \mathrm{Im}(P), w \in \ker(P)\big).$$

Hausaufgabe 7.1 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei U ein Unterraum von W.

(a) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ von U unter f ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(U)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\dim\big(f^{-1}(U)\big) = \dim\big(U \cap \mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

Hausaufgabe 7.2 Sei $V = \mathbb{C}[x]$ betrachtet als Vektorraum über $K = \mathbb{C}$. Seien V_+ und V_- gegeben durch

$$V_\pm := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : p(-x) = \pm p(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = V_+ \oplus V_-$. Geben Sie eine Basis von V_+ und eine Basis von V_- an.

Hausaufgabe 7.3 Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K von Dimension $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (Beweisen Sie Ihre Antwort)

(a) Sind $U, W \subseteq V$ Unterräume mit $\dim(U) + \dim(W) > n$, so gilt $U \cap W \neq \{0\}$.

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von Dimension 2 und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $V = U \oplus W$. Dann gilt $|W| = 27$.

(c) Ist $B \subseteq V \setminus \{0\}$ mit $|B| > n$, dann enthält B eine Basis von V.

Hausaufgabe 7.4 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$U^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(b) Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^n$ und

$$U := \mathrm{span}\{e_1 + \cdots + e_n\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.

(c) Sei $\{0\} \neq W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein weiterer Unterraum. Nehmen Sie an, dass eine Basis $w_1, \dots, w_k$ von W existiert mit

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \sum_{j=1}^{k} \langle x, w_i \rangle w_i$. Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 6.12.2024 in Panda.