Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

7. Übungsblatt – Lösungen

Hausaufgabe 7.1 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei U ein Unterraum von W.

(a) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ von U unter f ein Unterraum von V ist.
Lösung: Da $f(O_V) = O_W \in U$ gilt $O_V \in f^{-1}(U)$. Wenn $x, y \in f^{-1}(U)$, dann $f(x), f(y) \in U$. Weil U ein Unterraum und f linear ist, gilt $f(x+y) = f(x)+f(y) \in U$. Es folgt $x+y \in f^{-1}(U)$. Wenn $x \in f^{-1}(U)$ und $\lambda \in K$, dann $f(x) \in U$ und darum $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in U$. Es folgt $\lambda x \in f^{-1}(U)$. Dies zeigt, dass $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(U)$.
Lösung: Ein Element $x \in V$ ist genau dann enthalten in $\mathrm{Ker}(f)$, wenn $f(x) = O_W$. Weil $O_W \in U$, folgt $x \in f^{-1}(U)$ für alle $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\dim\big(f^{-1}(U)\big) = \dim\big(U \cap \mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.
Lösung: Wenn X, Y endlich dimensionale Vektorräume über K sind und $\phi : X \to Y$ linear ist, dann gilt

$$\dim(X) = \dim\big(\mathrm{Ker}(\phi)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(\phi)\big)$$

Wir betrachten jetzt $X = f^{-1}(U)$, $Y = W$ und $\phi : f^{-1}(U) \to W$, $x \mapsto f(x)$. Dann gilt

$$\mathrm{Im}(\phi) = f(f^{-1}(U)) = U \cap \mathrm{Im}(f)$$

und $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(f)$. Es folgt

$$\dim\big(f^{-1}(U)\big) = \dim\big(U \cap \mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big).$$

Hausaufgabe 7.2 Sei $V = \mathbb{C}[x]$ betrachtet als Vektorraum über $K = \mathbb{C}$. Seien V_+ und V_- gegeben durch

$$V_\pm := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : p(-x) = \pm p(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = V_+ \oplus V_-$. Geben Sie eine Basis von V_+ und eine Basis von V_- an. *Lösung:* Seien $B_+ := \{x^{2k} : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V_+$ und $B_- = \{x^{2k+1} : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V_-$. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \in \mathbb{C}[x]$. Wenn $p(x) \in V_+$, dann

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(x) = \frac{1}{2}p(-x) + \frac{1}{2}p(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n c_k x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \big((-1)^k + 1\big) c_k x^k = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ gerade}}} c_k x^k \in \mathrm{span}(B_+). \end{aligned}$$

Wenn $p(x) \in V_-$, dann

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(x) = -\frac{1}{2}p(-x) + \frac{1}{2}p(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n c_k x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \big(-(-1)^k + 1\big) c_k x^k = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} c_k x^k \in \mathrm{span}(B_-). \end{aligned}$$

Es folgt, dass $V_\pm = \mathrm{span}(B_\pm)$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $c_0 = c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, sodass $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ das Nullpolynom ist, dann gilt $\deg\big(p(x)\big) = \deg\big(0\big) = -\infty$. Darum gilt $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Es folgt, dass $B_+ \cup B_-$ eine Menge von linear unabhängige Elemente ist. Darum ist auch $B_\pm$ eine Menge von linear unabhängige Elemente und deshalbe eine Basis von $V_\pm$.

Hausaufgabe 7.3 Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K von Dimension $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (Beweisen Sie Ihre Antwort)

(a) Sind $U, W \subseteq V$ Unterräume mit $\dim(U) + \dim(W) > n$, so gilt $U \cap W \neq \{0\}$.
Lösung: Wahr. Seien $k = \dim(U)$ und $l = \dim(W)$ und sei $\{u_1, \dots, u_k\}$ eine Basis von U und $\{w_1, \dots, w_l\}$ eine Basis von W. Weil $k+l > n = \dim(V)$ sind die Vektoren $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l$ linear abhängig. Es gibt darum $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in K$ sodass

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{j=1}^{l} d_j w_j = O$$

und $c_i \neq 0$ für ein i oder $d_j \neq 0$ für ein j. Wenn $\sum_{i=1}^k c_i u_i = O$ wäre, dann wäre $\sum_{j=1}^l d_j w_j$ gleich O. Weil $\{u_1, \dots, u_k\}$ und $\{w_1, \dots, w_l\}$ Basen von U bzw. W sind, würde folgen, dass $c_1 = \cdots = c_k = d_1 = \cdots = d_l = 0$. Darum gilt $\sum_{i=1}^k c_i u_i \neq O$. Weil $\sum_{i=1}^k c_i u_i \in U$ und $\sum_{i=1}^k c_i u_i = -\sum_{j=1}^l d_j w_j \in W$, folgt, dass $\sum_{j=1}^l d_j w_j \in (U \cap W) \setminus \{O\}$.

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von Dimension 2 und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $V = U \oplus W$. Dann gilt $|W| = 27$.
Lösung: Wahr. Weil $V = U \oplus W$ gilt $\dim(W) = \dim(V) - \dim(U) = 5-2 = 3$. Sei $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von W. Dann ist die Abbildung

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \to W, \quad (c_1, c_2, c_3) \mapsto c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$$

eine Bijektion. Darum gilt

$$|W| = |(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3| = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}|^3 = 3^3 = 27.$$

(c) Ist $B := \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V \setminus \{0\}$ mit $m > n$, dann enthält B eine Basis von V.
Lösung: Wahr wenn $n = 0$ oder $n = 1$, sonst falsch. Wenn $n = 0$, dann ist die leere Menge eine Basis von V. Wenn $n = 1$, dann besitzt jede Basis von V genau ein Element. Für jedes $v \in V \setminus \{O\}$ ist die Menge $\{v\}$ eine Basis von V. Wenn $n \geq 2$, dann besitzt jede Basis von V mindestens 2 linear unabhängige Vektoren. Sei $v \in V \setminus \{O\}$. Die Vektoren v und λv sind für alle $\lambda \in K$ linear abhängig. Sei $B = \{jv : j \in \mathbb{N}, j \leq m\}$. Dann ist $A \subseteq B$ genau dann eine Teilmenge von linear unabhängige Vektoren, wenn $|A| \leq 1$. B enthält darum keine Basis.

Hausaufgabe 7.4 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$U^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $U \cap U^\perp = \{0\}$.
Lösung: Für alle $u \in U$ gilt $\langle O, u \rangle = 0$ und darum $O \in U^\perp$. Wenn $x, y \in U^\perp$, dann gilt für alle $u \in U$, dass

$$\langle x + y, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle = 0 + 0 = 0$$

und darum $x + y \in U^\perp$. Wenn $x \in U^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $u \in U$, dass

$$\langle \lambda x, u\rangle = \lambda\langle x, u\rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

und darum $\lambda x \in U^\perp$. Dies beweist, dass $U^\perp$ ein Unterraum ist. Wenn $u \in U \cap U^\perp$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2 = \langle u, u\rangle = 0.$$

Es folgt $u = O$. Darum gilt $U \cap U^\perp = \{O\}$.

(b) Seien $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^n$ und

$$U := \operatorname{span}\{e_1 + \cdots + e_n\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.
Lösung: Für $1 \leq i < n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle e_i - e_{i+1}, \lambda(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)\rangle = \lambda - \lambda = 0$$

und darum $e_i - e_{i+1} \in U^\perp$. Seien $c, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ und nehme an, dass $c(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(e_j - e_{j+1}) = O$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 =& \Big\langle c(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(e_j - e_{j+1}), e_1 + e_2 + \cdots + e_n \Big\rangle \\ &= \Big\langle c(e_1 + e_2 + \cdots + e_n), e_1 + e_2 + \cdots + e_n \Big\rangle + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \big\langle (e_j - e_{j+1}), e_1 + e_2 + \cdots + e_n \big\rangle \\ &= c\big\langle e_1 + e_2 + \cdots + e_n, e_1 + e_2 + \cdots + e_n \big\rangle = nc \end{aligned}$$

und darum $c = 0$. Weiter gilt

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j(e_j - e_{j+1}) = c_1 e_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (c_j - c_{j-1}) e_j - c_{n-1} e_n.$$

Weil $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, folgt $c_1 = 0$, $c_2 - c_1 = 0$, $c_3 - c_2 = 0$, $\ldots$, $c_{n-1} - c_{n-2} = 0$, und $-c_{n-1} = 0$. Die erste Gleichung impliziert $c_1 = 0$. Die zweite Gleichung impliziert dann $c_2 = 0$. Die dritte Gleichung impliziert dann $c_3 = 0$ und so weiter. Es folgt $c = c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Darum sind $e_1 + \cdots + e_n, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n$ linear unabhängig und ist $\{e_1 + \cdots + e_n, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

Weil $e_1 + \cdots + e_n \notin U^\perp$ gilt $U^\perp \neq V$ und darum $\dim(U^\perp) \leq n - 1$. Da $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Teilmenge von linear unabhängige Elemente in $U^\perp$ ist, folgt, dass $\dim(U^\perp) = n - 1$. Insbesondere ist $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Basis von $U^\perp$.

Da $\{e_1 + \cdots + e_n, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, gilt

$$\begin{aligned} U + U^\perp &= \operatorname{span}(e_1 + \cdots + e_n\}) + \operatorname{span}(\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}) \\ &= \operatorname{span}(e_1 + \cdots + e_n\}, \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}) = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Nach (a) gilt $U \cap U^\perp = \{O\}$. Es folgt, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.

(c) Sei $\{0\} \neq W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein weiterer Unterraum. Nehmen Sie an, dass eine Basis $w_1, \ldots, w_k$ von W existiert mit

$$\langle w_i, w_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ gilt.
Lösung: Nach (a) gilt $W \cap W^\perp = \{O\}$. Es ist darum zu zeigen, dass $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j \in \operatorname{span}(\{w_1, \ldots, w_k\}) = W.$$

Für alle $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big\langle v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j, \sum_{i=1}^{k} c_i w_i \Big\rangle &= \sum_{i=1}^{k} c_i \Big\langle v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j, w_i \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i \Big(\big\langle v, w_i \big\rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle \langle w_j, w_i \rangle \Big) = \sum_{i=1}^{k} c_i \Big(\big\langle v, w_i \big\rangle - \langle v, w_i \rangle \Big) = 0.
\end{aligned}$$

Darum gilt $v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j \in W^\perp$. Es folgt, dass

$$v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j + \Big(v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j \Big) \in W + W^\perp.$$

Weil dies gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$, folgt $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$.