Universität Paderborn Wintersemester 2024–2025
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Lineare Algebra 1

7. Übungsblatt – Lösungen

Präsenzaufgabe 7.2 Sei $V = \mathbb{C}^3$ und sei $U = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2i\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right) \subseteq V$. Bestimmen Sie Unterräume W, sodass

(a) $V = U \oplus W$.

Lösung: Sei $W = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$. Wenn $x, y, z \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\frac{x-2iy}{3}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix} + \frac{-ix+y}{3}\begin{pmatrix}2i\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $V = U + W$. Wenn $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ und $\lambda\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2i\\1\\0\end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, dann folgt

$$\lambda + 2i\mu = 1, \quad \lambda i + \mu = 0 \quad \text{und} \quad \nu = 0$$

und damit $\lambda = \mu = \nu$. Es folgt, dass $U \cap W = \{O\}$. Darum gilt $V = U \oplus W$.

(b) $V = U + W$, aber V nicht die direkte Summe von U und W ist.
Lösung: Sei $W = V$. Dann gilt $U + W = U + V = V$ und $U \cap V = U \neq \{O\}$. Darum ist V nicht die direkte Summe von U und W.

(c) $U + W \neq V$.
Lösung: Sei $W = \{O\}$. Dann gilt $U + W = U \neq V$.

Präsenzaufgabe 7.3 Sei V ein Vektorraum und seien U und W Unterräume. Zeigen Sie, dass

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Beweis: Sei

$$T : U \times W \to V, \quad (u, w) \mapsto u - w$$

Die Abbildung T is linear und es gilt $\operatorname{Im}(T) = \{u - w : u \in U, w \in W\} = U + W$ und $\ker(T) = \{(v, v) : v \in U \cap W\}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\dim(U) + \dim(W) &= \dim(U \times W) = \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) + \dim\big(\ker(T)\big)\\ &= \dim(U + V) + \dim(\{(v, v) : v \in U \cap W\}) = \dim(U + V) + \dim(U \cap W).\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 7.4 Für $t \geq 0$ sei

$$f_t : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x+t}.$$

Zeigen Sie, dass die Teilmenge $Q = \{f_t : t \geq 0\}$ von $\mathcal{F}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ linear unabhängig ist.
Beweis: Seien $t_1, \ldots, t_n \geq 0$, mit $t_i \neq t_j$, falls $i \neq j$. Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass $\sum_{j=1}^n c_j f_{t_j} = 0$. Dann gilt für alle $x > 0$

$$\sum_{j=1}^n c_j \prod_{k \neq j} (x + t_k) = \left(\prod_{k=1}^n (x + t_k) \right) \sum_{j=1}^n c_j \frac{1}{x + t_j} = \left(\prod_{k=1}^n (x + t_k) \right) \sum_{j=1}^n c_j f_{t_j}(x) = 0.$$

Wir definieren die Polynomfunktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^n c_j \prod_{k \neq j} (x + t_k).$$

Da $p(x) = 0$ für alle $x > 0$, besitzt p unendlich viele Nullstellen. Es folgt, dass $p = 0$. Insbesondere gilt für alle i

$$\left(\prod_{k \neq i} (-t_i + t_k) \right) c_i = \sum_{j=1}^n c_j \prod_{k \neq j} (-t_i + t_k) = p(-t_i) = 0$$

Weil $t_i \neq t_k$ für alle $k \neq i$, gilt $\prod_{k \neq i} (-t_i + t_k) \neq 0$ und es folgt, dass $c_i = 0$ für alle i.

Präsenzaufgabe 7.5 Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Projektion auf V ist eine lineare Abbildung $P : V \to V$, sodass $P \circ P = P$.

(a) Seien U und W Unterräume von V, sodass $V = U \oplus W$. Sei $P : V \to V$ eine Abbildung gegeben durch

$$P(u + w) = u \qquad (u \in U, w \in W).$$

Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist.
Lösung: Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$. Es gibt eindeutige $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in W$, sodass $v_1 = u_1 + w_1$ und $v_2 = u_2 + w_2$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} &P(v_1 + v_2) = P\big((u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)\big) = u_1 + u_2 = P(u_1 + w_1) + P(u_2 + w_2) = P(v_1) + P(v_2), \\ &P(\lambda v_1) = P(\lambda u_1 + \lambda w_1) = \lambda u_1 = \lambda P(u_1 + w_1) = \lambda P(v_1). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass P linear ist. Weiter gilt

$$(P \circ P)(v_1) = P(P(u_1 + w_1)) = P(u_1) = u_1 = P(u_1 + w_1) = P(v_1).$$

Dies zeigt, dass $P \circ P = P$. Es folgt, dass P eine Projektion ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $P : V \to V$ eine Projektion ist. Zeigen Sie, dass

$$V = \operatorname{Im}(P) \oplus \ker(P)$$

und

$$P(u + w) = u \qquad \big(u \in \operatorname{Im}(P), w \in \ker(P)\big).$$

Lösung: Sei $v \in U \cap W$. Dann gilt $P(v) = v$ und $P(v) = O$ und darum $v = O$. Es folgt, dass $U \cap W = \{O\}$. Sei $v \in V$. Setze $u = P(v)$ und $w = v - u$. Dann gilt $v = u + w$. Da $P(u) = P\big(P(v)\big) = (P \circ P)(v) = P(v) = u$, ist $u \in U$. Da $P(w) = P(v - u) = P(v) - P(u) = u - u = O$, ist $w \in W$. Dies zeigt, dass $U + W = V$. Es folgt, dass $V = U \oplus W$. Wenn $u \in U$ und $w \in W$, dann $P(u + w) = P(u) + P(w) = u + O = u$.