Universität Paderborn Wintersemester 2024–2025
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

# Lineare Algebra 1

## 8. Übungsblatt – Lösungen

**Präsenzaufgabe 8.1** Sei $K$ ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$. Beweisen Sie, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$.

**Präsenzaufgabe 8.2** Sei $K$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M(m \times n, K)$$

definieren wir die transponierte Matrix $A^T \in M(n \times m, K)$ durch

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M(n \times m, K)$$

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $A \in M(m \times k, K)$ und $B \in M(k \times n, K)$. Zeigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$.

(b) Für $x, y \in K^n$, sei $\langle x, y \rangle_n := \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Zeigen Sie, dass $\langle x, Ay \rangle_m = \langle A^T x, y \rangle_n$ für alle $x \in K^m$, $y \in K^n$ und $A \in M(m \times n, K)$.

(c) Für $S \subseteq K^n$ definieren wir das Orthokomplement $S^\perp$ von $S$ durch

$$S^\perp := \{x \in K^n : \langle x, y \rangle_n = 0 \text{ für alle } y \in S\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(A) = \big(\mathrm{Bild}(A^T)\big)^\perp$ für alle $A \in M(m \times n, K)$.

**Präsenzaufgabe 8.3** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und sei $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(T_A)$ und $\mathrm{Bild}(T_A)$.

**Präsenzaufgabe 8.4** Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Was ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems? Geben Sie eine Basis des Unterraums $\mathcal{L}$ an.

**Präsenzaufgabe 8.5** Bestimmen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und geben Sie gegebenenfalls an, was $A^{-1}$ ist.

**Hausaufgabe 8.1** Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 &= 17 \\ 2x_1 - 7x_3 + 11x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Was ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems? Geben Sie eine Basis des Unterraums $\mathcal{L}$ an.

**Hausaufgabe 8.2** Für welche komplexen Parameter $a \in \mathbb{C}$ besitzt das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^3$ in abhängigkeit von $a$ an.

$$\begin{aligned} &(1-i)x_2 + (-i)x_3 = -5 - 2i \\ &(-1+i)x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = -i \\ &-ix_1 + x_2 = -1 - 3i \\ &ix_1 + x_2 = 1 - i + 2a \end{aligned}$$

**Hausaufgabe 8.3** Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie die inverse Matrix.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

**Hausaufgabe 8.4** Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ sodass $A_{i,j} = 0$ für alle $i, j$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass $A^n = 0$ die Nullmatrix ist.

**Hausaufgabe 8.5** Sei $K$ in Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Spur (Eng. trace) $\mathrm{tr}(A)$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist definiert als die Summe der Matrixkoeffizienten auf der Diagonalen von $A$, d.h.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{n} A_{j,j}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K, \quad A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \big(A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ gibt, sodass $AB - BA = I_n$ die Identitätsmatrix ist.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A) \qquad \big(A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und invertierbare Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$.