Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

8. Übungsblatt – Lösungen

Hausaufgabe 8.1 Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 &= 17 \\ 2x_1 - 7x_3 + 11x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Was ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems? Geben Sie eine Basis des Unterraums $\mathcal{L}$ an.

Lösung (ohne Rechnung): Die Lösungen sind

$$x = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} - \frac{t}{4} \\ \frac{9}{4} - \frac{3t}{4} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3t}{2} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{C}).$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathcal{L}$.

Hausaufgabe 8.2 Für welche komplexen Parameter $a \in \mathbb{C}$ besitzt das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^3$ in abhängigkeit von a an.

$$\begin{aligned} &(1-i)x_2 + (-i)x_3 = -5 - 2i \\ &(-1+i)x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = -i \\ &-ix_1 + x_2 = -1 - 3i \\ &ix_1 + x_2 = 1 - i + 2a \end{aligned}$$

Lösung (ohne Rechnung): Das Gleichungssystem besitzt genau dann eine Lösung wenn $a = -5$. In diesem Fall gilt $x = \begin{pmatrix} 1+4i \\ -5-2i \\ 5+2i \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 8.3 Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie die inverse Matrix.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung (ohne Rechnung): A ist invertierbar mit Inversematrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{-7}{6} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{12} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn B invertierbar wäre, dann gäbe es eine Matrix C, sodass $CB = I_3$. Dies würde implizieren, dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = CB \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was ein Widerspruch wäre. Daher ist B nicht invertierbar.

Hausaufgabe 8.4 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ sodass $A_{i,j} = 0$ für alle i, j mit $1 \leq i \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass $A^n = 0$ die Nullmatrix ist.

Lösung: Seien $1 \leq i, j \leq n$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(A^n\right)_{i,j} &= \sum_{k_1=1}^{n} A_{i,k_1} \left(A^{n-1}\right)_{k_1,j} = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} A_{i,k_1} A_{k_1,k_2} \left(A^{n-2}\right)_{k_2,j} \\ &= \cdots = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{n} A_{i,k_1} A_{k_1,k_2} \dots A_{k_{n-2},k_{n-1}} A_{k_{n-1},j} \end{aligned}$$

Wenn $A_{i,k_1} A_{k_1,k_2} \dots A_{k_{n-2},k_{n-1}} A_{k_{n-1},j} \neq 0$, dann

$$i > k_1 > k_2 > \cdots > k_{n-1} > j.$$

Darum $i - j > n - 1$. Weil $1 \leq i, j \leq n$, gilt aber $i - j \leq n - 1$. Dies ist ein Widerspruch. Es folgt, dass $A_{i,k_1} A_{k_1,k_2} \dots A_{k_{n-2},k_{n-1}} A_{k_{n-1},j} = 0$ für alle $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ und i, j. Damit is bewiesen, dass $A^n = 0$.

Hausaufgabe 8.5 Sei K in Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Spur (Eng. trace) $\mathrm{tr}(A)$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist definiert als die Summe der Matrixkoeffizienten auf der Diagonalen von A, d.h.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{n} A_{j,j}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K, \quad A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

eine lineare Abbildung ist.

Lösung: Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A + B) &= \sum_{j=1}^{n} (A + B)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} (A_{j,j} + B_{j,j}) \\ &= \Big(\sum_{j=1} A_{j,j}\Big) + \Big(\sum_{j=1} B_{j,j}\Big) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \\ \mathrm{tr}(\lambda A) &= \sum_{j=1}^{n} (\lambda A)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda A_{j,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{j,j} = \lambda \mathrm{tr}(A). \end{aligned}$$

Es folgt, dass tr linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \qquad \big(A, B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

Lösung: Sein $A, B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{j=1}^{n} (AB)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{k,j} A_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = \operatorname{tr}(BA).\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$ gibt, sodass $AB - BA = I_n$ die Identitätsmatrix ist.
Lösung: Seien $A, B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$. Es gilt

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0 \neq 1 = \operatorname{tr}(I_n).$$

Es folgt, dass $AB - BA \neq I_n$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A) \qquad \big(A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)\big).$$

Lösung: Sei $A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$. Es gilt

$$\operatorname{tr}(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (A^T)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,j} = \operatorname{tr}(A).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(B)$ für alle $B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$ und invertierbare Matrizen $A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$.
Lösung: Sein $A, B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$. Wenn A invertierbar ist, dann

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}\big((AB)A^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(A^{-1}(AB)\big) = \operatorname{tr}(A^{-1}AB) = \operatorname{tr}(B).$$