Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

8. Übungsblatt – Lösungen

Präsenzaufgabe 8.1 Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$. Beweisen Sie, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$. *Beweis:* Wenn $ad - bc \neq 0$, dann ist $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ eine Inverse von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wenn $ad - bc = 0$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn a, b, c, d nicht all gleich 0 sind, dann ist die Abbildung T

$$T : K^2 \to K^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x$$

nicht injektiv. Wenn $a = b = c = d = 0$, dann ist die Abbildung T auch nicht injektiv. In beiden Fällen besitzt T keine Umkehrabbildung. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ keine Inverse besitzt.

Präsenzaufgabe 8.2 Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M(m \times n, K)$$

definieren wir die transponierte Matrix $A^T \in M(n \times m, K)$ durch

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M(n \times m, K)$$

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $A \in M(m \times k, K)$ und $B \in M(k \times n, K)$. Zeigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$.
Beweis: Für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gilt

$$\big((AB)^T\big)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{l=1}^{k} A_{j,l} B_{l,i} = \sum_{l=1}^{k} (B^T_{i,l} (A^T_{l,j} = (B^T A^T)_{i,j}.$$

(b) Für $x, y \in K^n$, sei $\langle x, y \rangle_n := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Zeigen Sie, dass $\langle x, Ay \rangle_m = \langle A^T x, y \rangle_n$ für alle $x \in K^m$, $y \in K^n$ und $A \in M(m \times n, K)$.
Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \langle x, Ay \rangle_m &= \sum_{j=1}^{m} x_j (Ay)_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} y_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_j A_{j,k} y_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (A^T)_{k,j} x_j \right) y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A^T x)_k y_k = \langle A^T x, y \rangle_n. \end{aligned}$$

(c) Für $S \subseteq K^n$ definieren wir das Orthokomplement $S^\perp$ von S durch

$$S^\perp := \{x \in K^n : \langle x, y\rangle_n = 0 \text{ für alle } y \in S\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(A) = \big(\mathrm{Bild}(A^T)\big)^\perp$ für alle $A \in M(m \times n, K)$.
Beweis: Wenn $x \in \mathrm{Ker}(A)$, dann gilt für alle $y \in K^m$

$$\langle x, A^T y\rangle_n = \langle A^T y, x\rangle_n = \langle y, Ax\rangle_m = \langle y, 0\rangle_m = 0$$

und darum $x \in \big(\mathrm{Bild}(A^T)\big)^\perp$. Wenn $x \in \big(\mathrm{Bild}(A^T)\big)^\perp$, dann gilt für alle $y \in K^m$

$$\langle y, Ax\rangle_m = \langle A^T y, x\rangle_n = \langle x, A^T y\rangle_n = 0.$$

Seien $c_1, \ldots, c_m \in K$, sodass $Ax = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ und seien $e_1, \ldots e_m \in K^m$ die Standardbasisvektoren. Dann gilt für alle $1 \leq j \leq m$

$$c_j = \left\langle e_j, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \right\rangle_m = \langle e_j, Ax\rangle_m = 0$$

Darum gilt $Ax = 0$ und es folgt, dass $x \in \mathrm{Ker}(A)$.

Präsenzaufgabe 8.3 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und sei $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(T_A)$ und $\mathrm{Bild}(T_A)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T_A) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 5y + 6z = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \text{ und } y + 2z = 0\} \\
&= \mathrm{span}\{(1, -2, 1)\}, \\
\mathrm{Bild}(T_A) &= \{Av \in \mathbb{R}^2 : v \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{span}\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\} = \mathrm{span}\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}.
\end{aligned}$$

Da $(1, 4)$ und $(2, 5)$ linear unabängig sind und $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, folgt $\mathrm{Bild}(T_A) = \mathbb{R}^2$. Die Menge $\{(1, -2, 1)\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Ker}(T_A)$ und $\{e_1, e_2\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(T_A)$.

Präsenzaufgabe 8.4 Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\
x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -3 \\
3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 7
\end{aligned}$$

Was ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems? Geben Sie eine Basis des Unterraums $\mathcal{L}$ an.

Lösung (ohne Berechnung): Die Lösungsmenge ist $\left\{ x = \begin{pmatrix} t \\ t-5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 : t \in \mathbb{C} \right\}$.

Präsenzaufgabe 8.5 Bestimmen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und geben Sie gegebenenfalls an, was A^{-1} ist.

Lösung (ohne Berechnung): Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $AB = BA = I_3$ und darum ist A invertierbar mit Inverse $A^{-1} = B$.