Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}' = \left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' = \left\{ w_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

mithilfe der Formel für den Basiswechsel.

Präsenzaufgabe 9.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

und seien

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$. Berechnen Sie

(i) ${}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}$

(ii) $D = {}_{\mathcal{B}}[T_A]_{\mathcal{B}}$

(iii) D^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$

(iv) A^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$

Hausaufgabe 9.1 Bestimmen Sie die duale Basis der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Hausaufgabe 9.2 Bestimmen Sie lineare Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f \circ g = 0$, aber $g \circ f \neq 0$. Verwenden Sie Ihre Antwort, um Matrizen $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ zu finden, sodass $AB = 0$, aber $BA \neq 0$.

Hausaufgabe 9.3 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über ein Körper K und sei $n = \dim(V)$. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}})_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}})_{k,k}$$

für alle Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V. Man nennt $\operatorname{tr}(f) := \sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}})_{k,k}$ die Spur von f.

Hausaufgabe 9.4

(a) Sei V der Vektorraum der (2×2)–Matrizen über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}$ von

$$g \colon V \to V, \quad A \mapsto A^T + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$$

bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen A mit $g(A) = B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$