Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

9. Übungsblatt

Hausaufgabe 9.1 Bestimmen Sie die duale Basis der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$.
Lösung: Die duale Basis von $\mathcal{B}$ ist $\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$ linear ist und bestimmt wird durch

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4v_1 + 3v_2 - v_3, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4v_1 - 3v_2 + 2v_3, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_1 + v_2 - v_3.$$

und darum

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f_1\big((-4x + 4y - z)v_1 + (3x - 3y + z)v_2 + (-x + 2y - z)v_3\big) = -4x + 4y - z \\ f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f_2\big((-4x + 4y - z)v_1 + (3x - 3y + z)v_2 + (-x + 2y - z)v_3\big) = 3x - 3y + z \\ f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f_2\big((-4x + 4y - z)v_1 + (3x - 3y + z)v_2 + (-x + 2y - z)v_3\big) = -x + 2y - z \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 9.2 Bestimmen Sie lineare Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f \circ g = 0$, aber $g \circ f \neq 0$. Verwenden Sie Ihre Antwort, um Matrizen $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ zu finden, sodass $AB = 0$, aber $BA \neq 0$.
Lösung: Seien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $f\circ g = 0$, aber $g\circ f = f \neq 0$. Sowohl f als auch g sind linear. Sei $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und seien $A := {}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ und $B := {}_{\mathcal{E}}[g]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. Dann gilt

$$AB = \big({}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}\big)\big({}_{\mathcal{E}}[g]_{\mathcal{E}}\big) = {}_{\mathcal{E}}[f\circ g]_{\mathcal{E}} = 0 \quad \text{und} \quad BA = \big({}_{\mathcal{E}}[g]_{\mathcal{E}}\big)\big({}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}\big) = {}_{\mathcal{E}}[g\circ f]_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} \neq 0.$$

Hausaufgabe 9.3 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über ein Körper K und sei $n = \dim(V)$. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}})_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}})_{k,k}$$

für alle Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V. Man nennt $\operatorname{tr}(f) := \sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}})_{k,k}$ die Spur von f.
Lösung: Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen von V. Dann gilt

$${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \big({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)^{-1}$$

und darum

$${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \big(({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\big) = \big(({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)^{-1}.$$

Aus Hausaufgabe 8.5(e) folgt jetzt

$$\sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}})_{k,k} = \operatorname{tr}\Big({}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}\Big) = \operatorname{tr}\Big(\big(({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)^{-1}\Big) = \operatorname{tr}\Big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}\Big) = \sum_{k=1}^{n} ({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}})_{k,k}.$$

Hausaufgabe 9.4

(a) Sei V der Vektorraum der (2×2)–Matrizen über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}$ von

$$g\colon V \to V, \quad A \mapsto A^T + \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot A$$

bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung: Wenn $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, dann

$$\begin{aligned} g\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a-c & b-d\\a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-c & b+c-d\\a+b & b+d\end{pmatrix}\\ &= (2a-c)v_1 + (2a-b-c-d)v_2 + (-a-b)v_3 + (-2a-b+c-d)v_4. \end{aligned}$$

Darum

$$\begin{aligned} g(v_1) &= 2v_1 + v_2 - v_3 - 3v_4,\\ g(v_2) &= v_2 + v_4,\\ g(v_3) &= v_1 + 3v_2 + 2v_3 + v_4,\\ g(v_4) &= -v_2 - v_3 - v_4. \end{aligned}$$

Es folgt

$${}_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen A mit $g(A) = B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt

$$B = 3v_1 + 5v_2 + v_3 - v_4$$

Das system von lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + z &= 3 \\ x + y + 3z - u &= 5 \\ -x + 2z - u &= 1 \\ -3x + y + z - u &= -1 \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{5}u + 1 \\ y &= 1 \\ z &= \frac{2}{5}u + 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $g(A) = B$ ist darum

$$\begin{aligned} &\left\{ xv_1 + yv_2 + zv_3 + uv_4 : u \in \mathbb{R}, x = -\frac{1}{5}u + 1, y = 1, z = \frac{2}{5}u + 1 \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{5}u + 1 \right) v_1 + v_2 + \left(\frac{2}{5}u + 1 \right) v_3 + uv_4 : u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}u + 1 & \frac{1}{5}u - 2 \\ -\frac{2}{5}u - 1 & -\frac{1}{5}u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -u + 1 & u - 2 \\ -2u - 1 & -u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$