Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung: Es gilt

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 31w_1 - 14w_2 - 10w_3,$$
$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -13w_1 + 7w_2 + 5w_3$$

und darum

$${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 31 & -13 \\ -14 & 7 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}' = \left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' = \left\{ w_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

mithilfe der Formel für den Basiswechsel.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
v_1' &= -\frac{1}{5}v_1 - \frac{7}{5}v_2, \\
v_2' &= \frac{4}{5}v_1 - \frac{7}{5}v_2, \\
w_1 &= \frac{1}{3}w_1' + \frac{1}{3}w_2' + \frac{1}{3}w_3', \\
w_2 &= \frac{4}{9}w_1' + \frac{4}{9}w_2' + \frac{7}{9}w_3', \\
w_3 &= \frac{5}{9}w_1' + \frac{2}{9}w_2' - \frac{1}{9}w_3'.
\end{aligned}$$

und darum

$${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{C}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} &= \big({}_{\mathcal{C}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}\big)\big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\big)\big({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}\big) = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 31 & -13 \\ -14 & 7 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ -2 & 15 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Präsenzaufgabe 9.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

und seien

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$. Berechnen Sie

(i) ${}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}$
Lösung:

$$ {}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $D = {}_{\mathcal{B}}[T_A]_{\mathcal{B}}$
Lösung:

$$
\begin{aligned}
D = {}_{\mathcal{B}}[T_A]_{\mathcal{B}} &= \big({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}\big)A\big({}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\big) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(iii) D^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$
Lösung:

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) A^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$
Lösung:

$$
\begin{aligned}
A^n &= \Big(\big({}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\big)D\big({}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\big)^{-1}\Big)^n = \big({}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\big)D^n\big({}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\big)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n - 3 & 1 - 2^n \\ 3 - 3 \cdot 2^n & 2^{n+2} - 3 & 1 - 2^n \\ 3 - 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n - 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$