Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Seien V, W, X Vektorräume und $f : V \to W$ und $g : W \to X$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie, dass $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
Beweis: Für alle $\ell \in X^*$ gilt

$$(g \circ f)^*(\ell) = \ell \circ (g \circ f) = (\ell \circ g) \circ f = f^*(\ell \circ g) = f^*\big(g^*(\ell)\big) = (f^* \circ g^*)(\ell).$$

(b) Nehmen Sie an, dass V und W endlichdimensional sind. Seien $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{C}$ eine Basis von W und seien $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{C}^*$ die entsprechenden Dualbasen von V^* bzw. W^*. Dann gilt

$${}_{\mathcal{B}^*}[f^*]_{\mathcal{C}^*} = \big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\big)^T.$$

Beweis: Seien $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$. Seien weiterhin $v_1, \dots, v_n$ die Elemente von $\mathcal{B}$. $w_1, \dots, w_m$ die Elemente von $\mathcal{C}$ und $v_1^*, \dots, v_n^*$ und $w_1^*, \dots, w_m^*$ die korrespondierende Elemente von $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{C}^*$. Für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ seien $c_{j,i}, \gamma_{i,j} \in K$, sodass

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,i} w_j \quad \text{und} \quad f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} v_i^*.$$

Für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gilt

$$\begin{aligned}\Big({}_{\mathcal{B}^*}[f^*]_{\mathcal{C}^*}\Big)_{i,j} &= \gamma_{i,j} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{k,j} v_k^*\Big)(v_i) = \big(f^*(w_j^*)\big)(v_i) = (w_j^* \circ f)(v_i) = w_j^*\big(f(v_i)\big) \\ &= w_j^*\Big(\sum_{k=1}^{m} c_{k,i} w_k\Big) = c_{j,i} = \Big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\Big)_{j,i} = \Big(\big({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\big)^T\Big)_{i,j}.\end{aligned}$$

(c) Nehmen Sie an, dass V endlichdimensional ist. Seien $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen von V und seien $\mathcal{B}_1^*$ und $\mathcal{B}_2^*$ die entsprechenden Dualbasen von V^*. Dann gilt

$${}_{\mathcal{B}_1^*}[\mathrm{id}_{V^*}]_{\mathcal{B}_2^*} = \big({}_{\mathcal{B}_2}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_1}\big)^T.$$

Beweis: Für alle $\ell \in V^*$ gilt $\mathrm{id}_V^*(\ell) = \ell \circ \mathrm{id}_V = \ell = \mathrm{id}_{V^*}(\ell)$ und darum $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$. Aus (b) folgt also, dass

$${}_{\mathcal{B}_1^*}[\mathrm{id}_{V^*}]_{\mathcal{B}_2^*} = {}_{\mathcal{B}_1^*}[\mathrm{id}_V^*]_{\mathcal{B}_2^*} = \big({}_{\mathcal{B}_2}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_1}\big)^T.$$

Präsenzaufgabe 10.3 Sei V ein Vektorraum. Betrachten Sie die Abbildung

$$\iota : V \to V^{**}, \quad x \mapsto \big(V^* \ni \ell \mapsto \ell(x)\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung ι injektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass ι nicht surjektiv ist, falls $\dim(V) = \infty$.
Beweis: Sei $x \in V$ mit $x \neq 0$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V mit $x \in \mathcal{B}$. Es gibt (genau) ein $\ell \in V^*$, sodass $\ell(x) = 1$ und $\ell(v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{B} \setminus \{x\}$. Es gilt $\big(\iota(x)\big)(\ell) = \ell(x) = 1 \neq 0$. Dies beweist, dass $\ker(\iota) = \{0\}$. Daher ist ι injektiv.

Nehmen Sie an, dass $\dim(V) = \infty$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Für $v \in \mathcal{B}$, sei $\ell_v \in V^*$ bestimmt durch $\ell_v(v) = 1$ und $\ell_v(w) = 0$ für alle $w \in \mathcal{B} \setminus \{v\}$. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis von V^* mit

$$\{\ell_v : v \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{B}'.$$

Es gibt genau ein $\lambda \in V^{**}$, sodass $\lambda(\ell) = 1$ für alle $\ell \in \mathcal{B}'$. Wir werden nun zeigen, dass $\lambda \neq \iota(x)$ für alle $x \in V$.

Sei $x \in V$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ und $c_1, \ldots, c_n \in K$, sodass $x = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$. Es gilt

$$\ell_v(x) = \begin{cases} c_j & (v = v_j \text{ für ein } 1 \leq j \leq n) \\ 0 & (v \in \mathcal{B} \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}). \end{cases}$$

Es folgt, dass $\lambda(\ell_v) \neq \ell_v(x) = \big(\iota(x)\big)(\ell_v)$ für alle $v \in \mathcal{B} \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$. Weil $\dim(V) = \infty$, gilt $\mathcal{B} \neq \{v_1, \ldots, v_n\}$ und darum $\lambda \neq \iota(x)$ für alle $x \in V$.

(b) Sei U ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass

$$(U^\perp)^\perp = \iota(U),$$

falls $\dim(V) < \infty$.
Beweis: Wenn $x \in U$ und $\ell \in U^\perp$, dann $\iota(x)(\ell) = \ell(x) = 0$. Darum gilt $\iota(U) \subseteq (U^\perp)^\perp$. Wenn $\dim(V) < \infty$, dann gilt

$$\begin{aligned} \dim\left((U^\perp)^\perp\right) &= \dim(V^*) - \dim(U^\perp) = \dim(V^*) - \Big(\dim(V) - \dim(U)\Big) \\ &= \dim(V^*) - \dim(V) + \dim(U). \end{aligned}$$

Weil $\dim(V^*) = \dim(V)$ und $\dim(U) = \dim\big(\iota(U)\big)$, folgt $\dim\big((U^\perp)^\perp\big) = \dim\big(\iota(U)\big)$ und damit $(U^\perp)^\perp = \iota(U)$.