Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & * & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Bestimmen Sie $\det(A)$.

Präsenzaufgabe 11.2 Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & i & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 11.3 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit Charakteristik ungleich 2, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $D : V^n \to W$ multilinear. Zeigen Sie, dass D genau dann alternierend ist, wenn $D(\dots, v, v, \dots) = 0$ für alle $v \in V$.

Präsenzaufgabe 11.4 Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \dots, x_n \in K$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Diese Determinante wird Vandermonde-Determinante genannt.

Präsenzaufgabe 11.5 Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle$$

Hausaufgabe 11.1 Sei $s \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A(s) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1-s \\ 4 & -2+s & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A(s)$ invertierbar?

Hausaufgabe 11.2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ sei

$$\overline{A} := (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \quad \text{und} \quad A^\dagger := {}^t(\overline{A}).$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt unitär falls, sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^\dagger$ gilt. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt hermitesch, wenn $A^\dagger = A$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(b) $|\det(A)| = 1$ für alle unitäre Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(c) $\det(A) \in \mathbb{R}$ für alle hermitesche Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(d) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) := \big\{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\big\}$ ist zusammen mit Matrixmultplikation eine Gruppe.

(e) $\mathrm{SU}(n) := \big\{A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) : A \text{ ist unitär}\big\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

Hausaufgabe 11.3 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verschiedene Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\lambda_j x}$$

für $j = 1, 2, \dots, n$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.
Hinweis: Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Für jedes $k = 1, 2, \dots, n-1$ differenzieren Sie beide Seiten der obigen Gleichung k mal und setzen Sie $t = 0$ ein. Sie erhalten so ein lineares Gleichungssystem. Wenn es eine nicht-triviale Lösung geben würde, dann müsste die Determinante der Koeffizienten des Gleichungssystems 0 sein. (Warum?) Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

Hausaufgabe 11.4 Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Seien $n_1, \dots n_m \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{j=1}^m n_m = n$. Für jedes $j = 1, 2, \dots, m$ sei $A_j \in M(n_j \times n_j, K)$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & * & \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

eine obere Blockdreiecksmatrix. Bestimmen Sie $\det(A)$.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 17.1.2025 in Panda.