Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

11. Übungsblatt – Lösungen

Hausaufgabe 11.1 Sei $s \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A(s) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1-s \\ 4 & -2+s & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A(s)$ invertierbar?
Lösung: Es gilt

$$\det(A(s)) = A(s) = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1-s \\ 0 & 10+s & 5-4s \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 10+s & 5-4s \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -40 - 13s.$$

Die Matrix $A(s)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A(s)) \neq 0$, d.h. wenn $s \neq -\frac{40}{13}$.

Hausaufgabe 11.2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ sei

$$\overline{A} := (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{und} \quad A^\dagger := (\overline{A})^T.$$

Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt unitär falls, sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^\dagger$ gilt. Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt hermitesch, wenn $A^\dagger = A$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.
Lösung: Es gilt

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^n \overline{a}_{j,\sigma(j)} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)}} = \overline{\det(A)}.$$

(b) $|\det(A)| = 1$ für alle unitäre Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} |\det(A)| &= \sqrt{\det(A)\overline{\det(A)}} = \sqrt{\det(A)\det(\overline{A})} = \sqrt{\det(A)\det(\overline{A}^T)} \\ &= \sqrt{\det(A)\det(A^\dagger)} = \sqrt{\det(AA^\dagger)} = \sqrt{\det(I_n)} = 1. \end{aligned}$$

(c) $\det(A) \in \mathbb{R}$ für alle hermitesche Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.
Lösung: Da

$$\overline{\det(A)} \det(\overline{A}) = \det(\overline{A}^T) = \det(A^\dagger) = \det(A),$$

ist $\det(A)$ reell.

(d) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$ ist zusammen mit Matrixmultplikation eine Gruppe.
Lösung: Matrixmultiplikation ist assoziativ. Weiter gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \qquad \big(A, B \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})\big)$$

und darum ist $AB \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ für alle $A, B \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Die Identitätsmatrix hat Determinante gleich 1 und darum $I_n \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Beachte, dass für alle $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ die Identität $AI_n = I_n A = A$ gilt. Wenn $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, dann $\det(A) = 1 \neq 0$ und darum ist A invertierbar. Es gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1$$

und darum $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Daraus folgt, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ eine Gruppe ist.

(e) $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A \text{ ist unitär}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.
Lösung: Für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$gilt

$$(AB)^\dagger = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = (\overline{B})^T (\overline{A})^T = B^\dagger A^\dagger. \tag{1}$$

Wenn $A, B \in \mathrm{SU}(n)$, dann

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

und damit $AB \in \mathrm{SU}(n)$. Wenn $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ invertierbar ist, dann folgt aus (1), dass $A^\dagger$ invertierbar ist und

$$(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger.$$

Wenn $A \in \mathrm{SU}(n)$, dann

$$(A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^{-1}.$$

Es folgt, dass $A^{-1} \in \mathrm{SU}(n)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{SU}(n)$ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ist.

Hausaufgabe 11.3 Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verschiedene Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\lambda_j x}$$

für $j = 1, 2, \ldots, n$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.
Beweis: Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Sei $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Weil

$$\frac{d^k}{dx^k} f_j(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda_j x} = \lambda_j^k e^{\lambda_j x} = \lambda_j^k f_j(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k f_j(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Da $f_j(0) = 1$, gilt insbesondere

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k = 0 \qquad (0 \leq k \leq n-1).$$

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Ac = 0$. Nach Präsenzaufgabe 11.4 gilt

$$\det(A) = \det(A^T) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Weil $\lambda_i \neq \lambda_j$, falls $i \neq j$, folgt $\det(A) \neq 0$. Dies zeigt, dass A invertierbar ist und damit

$$c = A^{-1}Ac = A^{-1}0 = 0.$$

Hausaufgabe 11.4 Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Seien $n_1, \ldots n_m \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{j=1}^m n_m = n$. Für jedes $j = 1, 2, \ldots, m$ sei $A_j \in M(n_j \times n_j, K)$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & * & \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

eine obere Blockdreiecksmatrix. Bestimmen Sie $\det(A)$.

Lösung: Wir betrachten zunächst den Fall $m = 2$. Sei $\sigma \in S_n$. Wenn $n_1 + 1 \le j \le n$ und $1 \le \sigma_j \le n_1$, dann $a_{j,\sigma_j} = 0$. Daher ist $\prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)} = 0$, falls $\sigma(\{n_1+1, n_1+2, \ldots, n\}) \cap \{1, 2, \ldots, n_1\} \neq \emptyset$. Es folgt, dass wenn $\prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)} \neq 0$, dann

$$\sigma(\{1, \ldots, n_1\}) = \{1, \ldots, n_1\} \quad \text{und} \quad \sigma(\{n_1+1, \ldots, n\}) = \{n_1+1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Für $\rho \in S_{n_1}$ und $\tau \in S_{n_2}$ definieren wir

$$\sigma_{\rho,\tau} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}, \quad j \mapsto \begin{cases} \rho(j) & (1 \le j \le n_1) \\ n_1 + \tau(j - n_1) & (n_1 + 1 \le j \le n). \end{cases}$$

Beachten Sie, dass $\sigma_{\rho,\tau}$ eine Bijektion ist und daher $\sigma_{\rho,\tau} \in S_n$. Die Teilmenge von S_n, die aus Elementen σ besteht, die (2) erfüllen, ist gegeben durch

$$\mathcal{S} := \{\sigma_{\rho,\tau} : \rho \in S_{n_1}, \tau \in S_{n_2}\}.$$

Da $\text{sign}(\sigma_{\rho,\tau}) = \text{sign}(\rho)\text{sign}(\tau)$ folgt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)} = \sum_{\rho \in S_{n_1}} \sum_{\tau \in S_{n_2}} \text{sign}(\sigma_{\rho,\tau}) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma_{\rho,\tau}(j)} \\
&= \sum_{\rho \in S_{n_1}} \sum_{\tau \in S_{n_2}} \text{sign}(\rho)\text{sign}(\tau) \left(\prod_{j=1}^{n_1} a_{j,\rho(j)} \right) \left(\prod_{j=n_1+1}^{n} a_{j,n_1+\tau(j-n_1)} \right) \\
&= \left(\sum_{\rho \in S_{n_1}} \text{sign}(\rho) \prod_{j=1}^{n_1} a_{j,\rho(j)} \right) \left(\sum_{\tau \in S_{n_2}} \text{sign}(\tau) \prod_{j=1}^{n_2} a_{j,n_1+\tau(j)} \right) \\
&= \det(A_1) \det(A_2).
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun mit Induktion, dass für allgemeines $m \in \mathbb{N}$

$$\det(A) = \prod_{j=1}^m \det(A_j) \tag{3}$$

gilt. Wenn $m = 1$, dann ist die Behauptung eindeutig wahr. Sei $m \in \mathbb{N}$ und nehme an, dass die Identität (3) für obere Blockdreiecksmatrix mit m Blöcke gilt. Sei jetzt $A \in M(n \times n, K)$ eine obere Blockdreiecksmatrix mit $m+1$ Blöcke $A_1, \dots, A_{m+1}$. Sei $B \in M(n - n_{m+1} \times n - n_{m+1}, K)$ gegeben durch

$$B_{i,j} = A_{i,j} \qquad (1 \leq i, j \leq n - n_{m+1}).$$

Dann gilt

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & A_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Aus dem ersten Teil des Beweises für $m = 2$ folgt nun $\det(A) = \det(B)\det(A_{m+1})$. Da

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & * & \\ & & A_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix}.$$

gilt nach der Induktionsvoraussetzung, dass $\det(B) = \prod_{j=1}^{m} \det(A_j)$ und darum

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{m+1} \det(A_j).$$

.