Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Lineare Algebra 1

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.2 Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & i & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ 0 & 5 & 2-i \end{pmatrix} \\
&= i \det \begin{pmatrix} 1 & -2i & i \\ 0 & 1+7i & 2-3i \\ 0 & 5 & 2-i \end{pmatrix} = i \det \begin{pmatrix} 1+7i & 2-3i \\ 5 & 2-i \end{pmatrix} \\
&= i\big((1+7i)(2-i) - 5(2-3i)\big) = -28 - i
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & i & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & i & -5 & 11 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & -5 & 11 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\
&= i \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - (-5) \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + 11 \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= i - 115 + 209 = 94 + i.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 11.4 Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \dots, x_n \in K$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Diese Determinante wird Vandermonde-Determinante genannt.
Beweis: Für $n = 1$ gilt $\det(1) = 1$ und das produkt über die leere Menge ist auch gleich 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und nehme an, dass die Aussage wahr ist für n. Wir betrachten jetzt

$$D_{n+1} := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Zuerst subtrahieren wir x_1 mal die vorletzte Spalte von der letzten Spalte. Dies ergibt

$$D_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n - x_1 x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n x_1 - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n x_1 - x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & (x_2 - x_1) x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & (x_n - x_1) x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Wir behandeln nun die anderen Spalten auf die gleiche Weise, indem wir von einer Spalte x_1 mal der vorherigen Spalte subtrahieren. Wir erhalten somit

$$D_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1) x_2 & \dots & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} & (x_2 - x_1) x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1) x_n & \dots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} & (x_n - x_1) x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1} & \dots & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-2} & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1) x_2 & \dots & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} & (x_2 - x_1) x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1) x_n & \dots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} & (x_n - x_1) x_n^{n-1} \\ x_{n+1} - x_1 & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1} & \dots & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-2} & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \Big) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt nun, dass

$$D_{n+1} = \Big(\prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \Big) \Big(\prod_{2 \le k < l \le n+1} (x_l - x_k) \Big) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i).$$