Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

12. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ und sei $T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von T_A und geben Sie wenn möglich eine Matrix $B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ an, sodass BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist, falls

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Präsenzaufgabe 12.2

(a) Sei $D : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, $p(x) \mapsto p'(x)$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von D.

(b) Sei $Q : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, $p(x) \mapsto xp(x)$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von Q.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $Q \circ D$.

(d) Sei $V = \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg(p) \leq 5\}$ und sei

$$T : V \to V, \quad p \mapsto Q \circ D^2(p) - D \circ Q(p) + 3p$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von T.

Präsenzaufgabe 12.3 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Zwei lineare Abbilungen $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ kommutieren, falls $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ und sind gleichzeitig diagonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass ${}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}}$ beide diagonal sind. Seien jetzt $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ diagonalisierbare lineare Abbilungen. Beweisen Sie, dass ϕ und ψ genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind. Beschreiben Sie die Eigenwerte von $\phi \circ \psi$, wenn ϕ und ψ kommutieren.

Hausaufgabe 12.1 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und sei $T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von T_A und geben Sie wenn möglich eine Matrix $B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ an, sodass BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Hausaufgabe 12.2 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

(b) Sei

$$C_A : M(3 \times 3, \mathbb{C}) \to M(3 \times 3, \mathbb{C}), \quad X \mapsto AXA^{-1}$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von C_A.

Hausaufgabe 12.3 Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen. Wenn ϕ invertierbar ist, dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von ϕ, wenn λ^{-1} ein Eigenwert von ϕ^{-1} ist. Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von ϕ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Beweisen Sie die folgende Behauptung. Wenn $\dim(V) < \infty$, dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von ϕ, wenn λ ein Eigenwert von $\phi^* : V^* \to V^*$ ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass A und A^T nicht dieselben Eigenräume haben.

Hausaufgabe 12.4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(b) Wenn $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ ist, dann ist $\overline{v} := \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert $\overline{\lambda}$.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 24.1.2025 in Panda.