Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

12. Übungsblatt – Lösungen

Hausaufgabe 12.1 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und sei $T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von T_A und geben Sie wenn möglich eine Matrix $B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ an, sodass BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist.
Lösung: Es gilt $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$. Damit sind die Eigenwerte gegeben durch 4 und 2. Lösen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $E_A(4) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $E_A(2) = \mathbb{C}(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{C}(e_2 - e_3)$. Sei dann

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (e_1 - e_2), (e_2 - e_3) \right\}.$$

Dann gilt mit $B := {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}}$ die Identität

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 12.2 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.
Lösung: Es gilt $\det(A) = 2 \neq 0$ und damit ist A invertierbar.

(b) Sei

$$C_A : M(3 \times 3, \mathbb{C}) \to M(3 \times 3, \mathbb{C}), \quad X \mapsto AXA^{-1}$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von C_A.
Lösung: Es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $1 \le i,j \le 3$ sei $E_{i,j} \in M(3\times 3, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$(E_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 1 & (k=i, l=j) \\ 0 & (k \neq i \text{ oder } l \neq j). \end{cases}$$

Dann

$$\big(C_V(E_{i,j})\big)_{k,l} = \big(AE_{i,j}A^{-1}\big)_{k,l} = \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} A_{k,n}(E_{i,j})_{n,m}A^{-1}_{m,l} = A_{k,i}A^{-1}_{j,l}.$$

und damit

$$\begin{aligned}
C_A(E_{1,1}) &= E_{1,1} - E_{1,2} \\
C_A(E_{1,2}) &= 2E_{1,2} \\
C_A(E_{1,3}) &= 2E_{1,3} \\
C_A(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}E_{1,1} - \frac{1}{2}E_{1,2} + \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{2,2} \\
C_A(E_{2,2}) &= E_{1,2} + E_{2,2} \\
C_A(E_{2,3}) &= E_{1,3} + E_{2,3} \\
C_A(E_{3,1}) &= E_{3,1} + E_{3,2} \\
C_A(E_{3,2}) &= E_{3,2} \\
C_A(E_{3,3}) &= E_{3,3}
\end{aligned}$$

Die Menge $\mathcal{B} = \{E_{i,j} : 1 \le i,j \le 3\}$ ist eine Basis von $M(3\times 3, \mathbb{C})$. Es folgt

$$_{\mathcal{B}}[C_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von C_A ist

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda \mathrm{Id} - C_A) \\
&= \det \begin{pmatrix}
\lambda-1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \lambda-2 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1
\end{pmatrix} \\
&= \big(\lambda - \frac{1}{2}\big)\big(\lambda-1\big)^6\big(\lambda-2\big)^2
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von C_A sind darum $\frac{1}{2}$, 1 und 2. Weiter gilt

$$\ker\Big(\frac{1}{2} - {}_{\mathcal{B}}[C_A]_{\mathcal{B}}\Big) = \ker \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker\Big(1 - {}_{\mathcal{B}}[C_A]_{\mathcal{B}}\Big) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker\Big(2 - {}_{\mathcal{B}}[C_A]_{\mathcal{B}}\Big) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Daraus folgt, dass die Eigenräume von C_A durch gegeben werden durch

$$E_{C_A}\Big(\frac{1}{2}\Big) = \operatorname{span}\{E_{1,1} + E_{1,2} - E_{2,1} - E_{2,2}\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{C_A}(1) = \operatorname{span}\{E_{1,1} + E_{1,2}, E_{1,1} + E_{2,2}, E_{1,3} - E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{C_A}(2) = \operatorname{span}\{E_{1,2}, E_{1,3}\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Hausaufgabe 12.3 Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen. Wenn ϕ invertierbar ist, dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von ϕ, wenn λ^{-1} ein Eigenwert von ϕ^{-1} ist. Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von ϕ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.
Beweis: Sei $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ. Dann gilt $\phi(v) = \lambda v$ und damit

$$\phi^{-1}(v) = \lambda^{-1}\lambda\phi^{-1}(v) = \lambda^{-1}\phi^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}\phi^{-1}\big(\phi(v)\big) = \lambda^{-1}v.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Behauptung. Wenn $\dim(V) < \infty$, dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von ϕ, wenn λ ein Eigenwert von $\phi^* : V^* \to V^*$ ist.
Beweis: Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}^*$ die duale Basis von V^*. Seien $\chi_\phi(\lambda)$ und $\chi_{\phi^*}(\lambda)$ die charakteristische Polynome von ϕ bzw. ϕ^*. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_\phi(\lambda) &= \det(\lambda \mathrm{Id}_V - \phi) = \det(\lambda E - {}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}}) = \det\big((\lambda E - {}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}})^T\big) = \det(\lambda E - {}_{\mathcal{B}^*}[\phi^*]_{\mathcal{B}^*}) \\ &= \det(\lambda \mathrm{Id}_{V^*} - \phi^*) = \chi_{\phi^*}(\lambda)\end{aligned}$$

Die Nullstellen der charakteristischen Polynome und damit auch die Eigenwerte von ϕ und ϕ^* sind also gleich.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass A und A^T nicht dieselben Eigenräume haben.
Lösung: Der einzige Eigenwert von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist 0 und der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der einzige Eigenwert von

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist 0 und der Eigenraum von A^T zum Eigenwert 0 ist $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 12.4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(b) Wenn $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ ist, dann ist $\overline{v} := \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert $\overline{\lambda}$.

Beweis: Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Dann gilt $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und darum

$$(A\overline{v})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\overline{v_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{i,j}}v_j = \overline{\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}v_j} = \overline{(Av)_i} = \overline{\lambda v_i} = \overline{\lambda}\overline{v_i} = \overline{\lambda}\overline{v}_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Es folgt, dass $\overline{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.