Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

12. Übungsblatt – Lösungen

Präsenzaufgabe 12.1 Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ und sei $T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von T_A und geben Sie wenn möglich eine Matrix $B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ an, sodass BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist, falls

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Es gilt $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$. Damit sind die Eigenwerte gegeben durch 0 und 1. Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $V_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

liefert $\ker(A - 1) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist A diagonalisierbar. Sei

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\mathcal{E}$ die Einheitsstandardbasis. Dann gilt mit $B := {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}}$ die Identität

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3$. Damit ist 3 der einzige Eigenwert. Es gilt

$$\ker(A - 3) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}e_1.$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert 3 gegeben durch $\mathbb{C}e_1$. Damit ist A nicht diagonalisierbar.

Präsenzaufgabe 12.2

(a) Sei $D : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, $p(x) \mapsto p'(x)$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von D.
Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, sodass $p'(x) = D\big(p(x)\big) = \lambda p(x)$. Wenn $\lambda \neq 0$, dann gilt

$$\deg\big(p(x)\big) = \deg\big(\lambda p(x)\big) = \deg\big(p'(x)\big)$$

Da $\deg\big(p'(x)\big) < \deg\big(p(x)\big)$, falls $p(x) \neq 0$, folgt, dass $p(x) = 0$ das Nullpolynom ist. Dies zeigt, dass λ kein Eigenwert von D ist. Wenn $\lambda = 0$, dann ist $p'(x) = D\big(p(x)\big) = 0$ das Nullpolynom. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist f' genau dann die Nullfunktion, wenn f konstant ist. Daher ist $p(x)$ ein konstantes Polynom. Somit ist 0 der einzige Eigenwert von D und $E_D(0) = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : p(x) \text{ ist konstant}\}$.

(b) Sei $Q : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, $p(x) \mapsto xp(x)$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von Q.
Lösung: Es gilt $\deg\big(Q\big(p(x)\big)\big) = \deg\big(xp(x)\big) = \deg(x) + \deg\big(p(x)\big) = 1 + \deg\big(p(x)\big)$. Daraus folgt, dass $Q\big(p(x)\big)$ nur dann ein Skalarvielfaches von $p(x)$ sein kann, wenn $p(x) = 0$. Wir sehen also, dass Q keine Eigenwerte hat.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $Q \circ D$.
Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \in \mathbb{C}[x]$, sodass $Q \circ D\big(p(x)\big) = \lambda p(x)$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{n} c_j j x^j = \sum_{j=0}^{n} c_j \lambda x^j.$$

und damit

$$c_j j = c_j \lambda \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Wenn $0 \leq j \leq n$ und $c_j \neq 0$, dann $\lambda = j$. Es folgt, dass in diesem Fall $c_i = 0$ für alle $i \neq j$ und darum $p(x) = c_j x^j$. Dies zeigt, dass $\mathbb{N}_0$ die Menge der Eigenwerte ist und

$$E_{Q\circ D}(\lambda) = \{cx^\lambda : c \in \mathbb{C}\} \qquad (\lambda \in \mathbb{N}_0).$$

(d) Sei $V = \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg(p) \leq 5\}$ und sei

$$T : V \to V, \quad p \mapsto Q \circ D^2(p) - D \circ Q(p) + 3p$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von T.
Lösung: Sei $\mathcal{B} := \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Bemerken Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist. Es gilt

$$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \chi_T(\lambda) &= \det(\lambda \mathrm{Id}_V - T) = \det(\lambda E - {_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von T sind $2, 1, 0, -1, -2$ und -3.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} - 2E) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_1\},\\
&\operatorname{Ker}({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} - E) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_2\},\\
&\operatorname{Ker}({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{-2e_2 + e_3\},\\
&\operatorname{Ker}({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} + E) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{6e_2 - 6e_3 + e_4\},\\
&\operatorname{Ker}({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} - 2E) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{-24e_2 + 36e_3 - 12e_4 + e_5\},\\
&\operatorname{Ker}({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} - 2E) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{120e_2 - 240e_3 + 120e_4 - 20e_5 + e_6\}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&E_T(2) = \{c : c \in \mathbb{C}\},\\
&E_T(1) = \{cx : c \in \mathbb{C}\},\\
&E_T(0) = \{-2cx^2 + cx^3 : c \in \mathbb{C}\},\\
&E_T(-1) = \{6cx^2 - 6cx^3 + cx^4 : c \in \mathbb{C}\},\\
&E_T(-2) = \{-24cx^2 + 36cx^3 - 12cx^4 + cx^5 : c \in \mathbb{C}\},\\
&E_T(-3) = \{120cx^2 - 240cx^3 + 120cx^4 - 20cx^5 + cx^6 : c \in \mathbb{C}\}.
\end{aligned}
$$

Präsenzaufgabe 12.3 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Zwei lineare Abbilungen $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ kommutieren, falls $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ und sind gleichzeitig diagonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass ${}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}}$ beide diagonal sind. Seien jetzt $\phi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ diagonalisierbare lineare Abbilungen. Beweisen Sie, dass ϕ und ψ genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind. Beschreiben Sie die Eigenwerte von $\phi \circ \psi$, wenn ϕ und ψ kommutieren.

Beweis: Seien ϕ und ψ diagonalisierbare lineare Abbildungen $V \to V$.

Wenn ϕ und ψ gleichzeitig diagonalisierbar sind, existiert eine Basis $\mathcal{B}$, sodass ${}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}}$ beide Diagonalmatrizen sind. Diagonalmatrizen kommutieren immer miteinander, dementsprechend gilt

$$
{}_{\mathcal{B}}[\phi \circ \psi]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[\psi \circ \phi]_{\mathcal{B}}.
$$

Sei $n = \dim_K(V)$. Die Abbildung

$$
{}_{\mathcal{B}}[\cdot]_{\mathcal{B}} : \operatorname{Lin}_K(V,V) \to M(n \times n, K), \quad L \mapsto {}_{\mathcal{B}}[L]_{\mathcal{B}}
$$

ist ein Isomorphismus für jede Basis $\mathcal{B}$, dementsprechend gilt $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

Wir nehmen nun an, dass ϕ und ψ kommutieren. Damit gilt für jedes $\lambda \in K$

$$
(\psi - \lambda) \circ \phi(v) = \phi \circ (\psi - \lambda)(v)
$$

und damit

$$
\phi\big(E_\psi(\lambda)\big) \subseteq E_\psi(\lambda).
$$

Sei nun $W \subseteq V$ ein Unterraum von V, sodass $\phi(W) \subseteq W$ gilt. Wir wollen zeigen, dass dann auch die Einschränkung $\phi|_W : W \to W$ diagonalisierbar ist.

Sei hierzu $w \in W$ mit $w = w_1 + \cdots + w_k$, wobei w_i Eigenvektoren von ϕ zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sind. Wir zeigen per Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass dann automatisch $w_i \in W$

für alle $i = 1, \cdots, k$ gilt. Für $i = 1$ ist $w = w_1 \in W$. Sei die Induktionsbehauptung gezeigt und $w = w_1 + \cdots + w_{k+1} \in W$. Dann gilt wegen $\phi(W) \subset W$ auch $(\phi - \lambda_1)(W) \subseteq W$, womit

$$W \ni (\phi - \lambda_1)w = \sum_{i=1}^{k+1} (\phi - \lambda_1)w_i = \sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - \lambda_1)w_i = \sum_{i=2}^{k+1} (\lambda_i - \lambda_1)w_i.$$

folgt. Da $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ für alle $2 \leq i \leq k$ gilt, folgt $w_2, \cdots, w_{k+1} \in W$ per Induktionsvorausetzung und damit dann auch $w_1 \in W$. Wir haben gezeigt, dass

$$W = \bigoplus_{\lambda \in K} \big(W \cap E_\phi(\lambda)\big)$$

gilt, womit $\phi|_W$ ebenfalls diagonalisierbar ist. Seien nun $\mu_1, \cdots, \mu_m$ die unterschiedlichen Eigenwerte von ψ. Nach dem eben gezeigten, ist $\phi|_{E_\psi(\mu_i)}$ für jedes $i = 1, \cdots, m$ diagonalisierbar. Für $1 \leq i \leq m$ sei $v_1^i, \cdots, v_{n_i}^i$ mit $n_i = \dim\big(E_\psi(\mu_i)\big)$ eine Basis von $E_\psi(\mu_i)$ von Eigenvektoren von ϕ. Dann ist

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{m} \{v_j^i : 1 \leq j \leq n_i\}$$

eine Basis von V sodass ${}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}}$ beide diagonal sind.
Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ die Eigenwerte von ϕ und $\mu_1, \cdots, \mu_m$ die Eigenwerte von ψ. Kommutieren ϕ und ψ, so gilt

$${}_{\mathcal{B}}[\phi \circ \psi]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[\phi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{B}}$$

und darum ist die Menge von Eigenwerte von $\phi \circ \psi$ enthalten in

$$\{\lambda_i \mu_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m\}.$$

Die Inklusion ist im Allgemeinen aber strikt.